TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
LEHRSTUHL UND INSTITUT
FÜR KONSTRUKTIONSLEHRE
PROF. DR.-ING. E. GIENCKE

1 BERLIN 10, den 30.4.1971
SALZUFER 17/19
TELEFON: 314-1
Durchwahl: 314-21 17

Diplomaufgabe

für Herrn Gerhard Krause, Matr.-Nr. 25 620

Auf reine Torsion beanspruchte Stäbe mit beliebigem Vollquerschnitt sind zu untersuchen:

1. Die Gleichungen für die Formänderungen und Kraftgrößen sind zusammenzustellen und hinsichtlich ihrer Übertragung in das Finite kritisch zu werten.
2. Es sind die zugehörigen finiten Gleichungen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente abzuleiten.
3. Zur Durchführung praktischer Rechnungen auf der Basis der Méthode der finiten Elemente (entweder nach dem Formänderungs- oder Kraftgrößenverfahren) ist ein Rechenprogramm (möglichst in FORTRAN IV) zu schreiben. Die Anzahl und Auswahl der Rechenbeispiele ist in Absprache mit dem betreuenden Assistenten (Herrn Dipl.-Ing. Hieronimus) vorzunehmen.
4. Es soll versucht werden, das zu (3) aufgestellte Rechenverfahren so zu erweitern, daß auch idealelastisch-plastisches Werkstoffverhalten berücksichtigt werden kann. Falls möglich, soll an Hand eines Beispiels die Konvergenz auf numerischem Wege getestet werden.

Literatur: Filonenko-Boroditsch: Elastizitätstheorie

Ausgabe der Arbeit: 3.5.1971
Abgabe der Arbeit : 3.8.1971

Gauch

Einleitung

In den folgenden Kapiteln ist der Fall der reinen Torsion mit der Methode der finiten Elemente behandelt worden.

Wird ein Stab mit Vollquerschnitt an seinen Enden durch ein Moment tordiert, so macht de St. Vênant die Annahme, daß alle Querschnitte in der gleichen Weise deformiert werden. Das setzt voraus, daß die Stabenden nicht eingespannt werden dürfen. Man spricht dann von unbehinderter Verwölbung. Gemäß der Voraussetzung nach de St. Vênant genügt es, einen beliebigen Querschnitt im Innern des Stabes zu betrachten und dessen Schubspannungsverteilung zu ermitteln. Da die Deformation sich in Richtung der Stabachse nicht ändert, muß auch der Schubspannungsverlauf längs Achsenrichtung erhalten bleiben.

Weisen die Endflächen diese Spannungsverteilung nicht auf, so herrscht kein reiner Torsionszustand. Nach dem de St. Vênant'schen Prinzip aber darf man erwarten, daß in hinreichender Entfernung von den Kraftangriffspunkten tatsächlich ein Spannungszustand der reinen Torsion vorliegt. Voraussetzung ist, daß die Längsabmessungen wesentlich größer sind als die Querabmessungen.

Überlagern Massenkräfte und Temperaturspannungen noch diesen Belastungsfall, so würde sich ein anderer Gesamtspannungszustand einstellen. Die Schubspannungen des Torsionsfalles werden davon nicht betroffen, d.h. bei den Gleichgewichtsbedingungen brauchen keine Massenkräfte und bei dem Prinzip der virtuellen Arbeit keine Temperaturglieder berücksichtigt werden.

Es soll nochmals erwähnt werden, daß das Torsionsmoment nur in den Endquerschnitten wirken darf. Eine äußere Belastung durch ein Drillmoment längs der Stabachse ist nicht zugelassen, da dann die Verwölbung von der Längsrichtung abhängig wäre. Das widerspricht aber der Annahme von de St. Vênant.

1. Kapitel: Zusammenstellung der Grundgleichungen für den Torsionsfall nach der Theorie von de Saint-Vénant

Im Fall der reinen Torsion wird ein Stab durch ein zur Stabachse paralleles Torsionsmoment beansprucht. Außerdem soll die Querschnittsgestalt in Abhängigkeit von der Länge als konstant angenommen werden.

Unbehinderte Verwölbung bedeutet, daß keine Normalkräfte auftreten können:

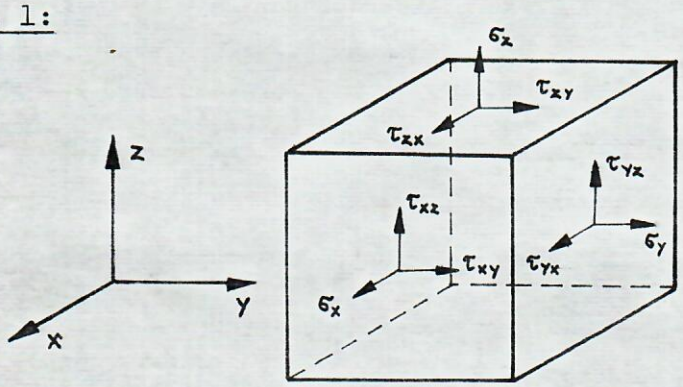
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = o$$

Massenkräfte brauchen nicht berücksichtigt zu werden:

$$X = Y = Z = o$$

Somit liefert das Gleichgewicht am Element in x-, y- und z-Richtung folgende drei Gleichungen:

Bild 1:



$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = o \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = o \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = o \qquad (3)$$

Elastizitätsgesetz und Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen lauten:

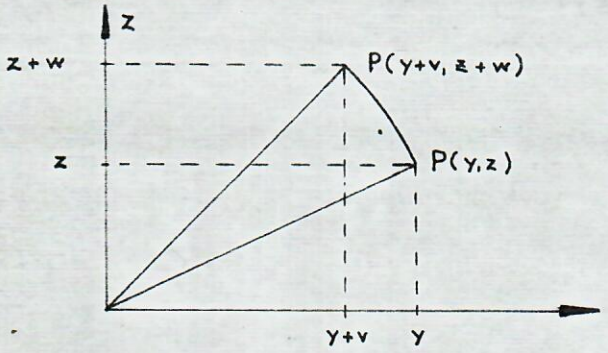
$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (4)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad (5)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad (6)$$

Zunächst sollen die Deformationen des Querschnitts betrachtet werden. Der Torsionswinkel an der Stelle x = o soll zu Null gesetzt und der für x =l mit θ bezeichnet werden. Man gewinnt für die Verschiebungen v und w in y- und z-Richtung mit Hilfe der Geometrie folgende Beziehungen:

Bild 2:



$$v = -\frac{\theta}{l} xz \qquad (7)$$

$$w = \frac{\theta}{l} xy \qquad (8)$$

Für die Verschiebung u in x-Richtung gilt nach de Saint-Vénant, daß alle Querschnitte die gleiche Verwölbung erfahren, d.h. die Verschiebung u ist von x unabhängig. Dem entspricht folgender Ansatz:

$$u\,(y,z) = \frac{\theta}{l} \cdot \phi\,(y,z) \qquad (9)$$

Hier bedeutet $\phi\,(y,z)$ die sog. Verwölbungsfunktion.

Die gewonnenen Beziehungen (7) bis (9) werden in die Verzerrungs-Verschiebungsrelationen eingesetzt. Somit folgt für die Schubspannungen:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \frac{\theta}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z\right) \tag{10}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \frac{\theta}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y\right) \tag{11}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = G \frac{\theta}{l} (-x + x) = o \tag{12}$$

Die Gleichungen (10) und (11) werden in die Gleichgewichtsbedingungen eingesetzt. Die Gleichungen (2) und (3) werden identisch erfüllt, so daß nur noch Gleichung (1) übrigbleibt.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta \phi = o \tag{1}$$

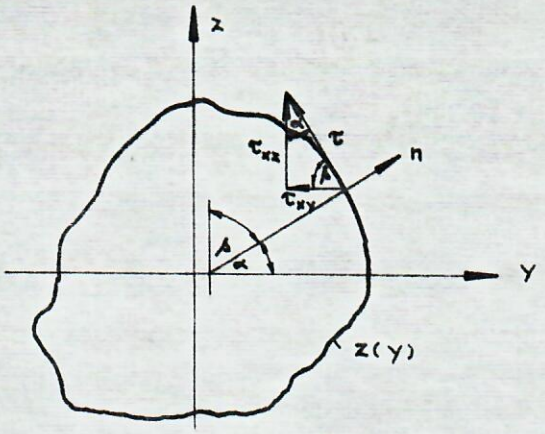
Das ist die Laplacesche DGl für die Verwölbungsfunktion.

Zur Formulierung der Randbedingungen werden die allgemeinen Randgleichungen betrachtet, wobei f_x, f_y und f_z die Oberflächenkräfte in der entsprechenden Richtung darstellen.

$$\begin{vmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos(n,x) \\ \cos(n,y) \\ \cos(n,z) \end{vmatrix} \tag{13}$$

Bei der reinen Torsion sind keine Oberflächenkräfte vorhanden. Außerdem gilt für jeden Querschnitt $\cos(n,x) = o$

Bild 3:



Somit liefert die erste Zeile von (13)

$$\tau_{xy} \cos(n,y) + \tau_{xz} \cos(n,z) = o \qquad (14)$$

Die restlichen beiden Gleichungen von (13) verschwinden. (14) läßt sich, wie folgt, umschreiben:

$$-\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xz}} = \frac{\cos(n,z)}{\cos(n,y)} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\tau\cdot\cos\beta}{\tau\cdot\cos\alpha} \qquad (15)$$

Gleichung (14) ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß der Schubspannungsvektor die Randkurve tangieren muß. Für Punkte auf der Randkurve $z(y)$ gilt demnach

$$\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dz}$$

oder

$$\tau_{xz} \cdot dy - \tau_{xy}\, dz = o$$

Werden für τ_{xy} und τ_{xz} die Beziehung (10) und (11) herangezogen, erhält man folgende Randbedingung für die Verwölbungsfunktion:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + y\right) dy - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} - z\right) dz = o \qquad (16)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich auch befriedigen, indem ein geeigneter Ansatz für die Schubspannungen gewählt wird. Dies geschieht durch Definition einer sog. Torsionsfunktion $\phi\,(y,z)$, die folgender Bedingung genügt:

$$\tau_{xy} := -2\,G\,\frac{\theta}{l}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{17}$$

$$\tau_{xz} := \;\;2\,G\,\frac{\theta}{l}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{18}$$

Werden (17) und (18) in (10) und (11) eingesetzt, so folgt

$$-2\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial y} - z \tag{19}$$

$$2\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} + y \tag{20}$$

Durch partielle Differentiation von (19) nach z und von (20) nach y gewinnt man die Poissonsche DGl für die Torsionsfunktion:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi = 1 \tag{21}$$

Die zugehörige Randbedingung erhält man durch Einsetzen der Beziehungen (19) und (20) in die Randgleichung (16):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,dz = d\Phi = 0$$

Das bedeutet aber, es muß

$$\Phi\,(y,z) = \text{const}$$

auf dem Rand $z(y)$ gelten. O.B.d.A. kann diese Konstante Null gesetzt werden.

$$\Phi\,(y,z) = 0$$

Im Hinblick auf weitere Verwendung sollen die wichtigsten Gleichungen noch einmal zusammengefaßt werden.

DGl für Verwölbungsfunktion

im Feld

$$\Delta\phi = o \tag{1}$$

auf dem Rand

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + y\right) dy - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} - z\right) dz = o \tag{16}$$

DGl für Torsionsfunktion

im Feld

$$\Delta\Phi = 1 \tag{21}$$

auf dem Rand

$$\Phi = o \quad . \tag{22}$$

Die Schubspannungen werden dargestellt durch

$$\tau_{xy} = G \frac{\theta}{l} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} - z\right) \tag{10}$$

$$\tau_{xz} = G \frac{\theta}{l} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + y\right) \tag{11}$$

oder

$$\tau_{xy} = -2\, G \frac{\theta}{l} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{17}$$

$$\tau_{xz} = 2\, G \frac{\theta}{l} \frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{18}$$

Die Drillung wird definiert durch

$$D = \frac{\theta}{l} = \frac{M_t}{G\, I_t} \tag{23}$$

Für das Torsionsmoment gilt

$$M_t = \int (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) \, dF$$

$$M_t = G \frac{\theta}{l} \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) y - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) z \right] dF \qquad (24)$$

$$M_t = 2 G \frac{\theta}{l} \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z \right) dF$$

$$M_t = - 4 G \frac{\theta}{l} \int \Phi (y,z) \, dF \qquad (24a)$$

Das Torsionsflächenmoment wird gegeben durch

$$I_t = 2 \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z \right) dF$$

$$I_t = - 4 \int \Phi(y,z) \, dF \qquad (25)$$

2. Kapitel: Aufstellung der finiten Gleichungen für die Formänderungs- und Kraftgrößenmethode

1. Einzelsystem

1.1 Formänderungsgrößenverfahren

Beim Formänderungsgrößenverfahren wird das Prinzip der virtuellen Verrückungen herangezogen. Das P.d.v.V. lautet:

" Das Gleichgewicht und die statischen Randbedingungen erfüllt ein Schnittkraft-Belastungszustand, wenn für alle virtuellen, geometrisch möglichen Verzerrungs-Verschiebungszustände die virtuelle äußere Arbeit gleich der virtuellen Formänderungsenergie ist" [1]

$$\delta \Pi_i = \delta \Pi_a \tag{1}$$

Da keine Feld- und Randlasten auftreten, verbleibt als einzige äußere Belastung nur das Torsionsmoment M_t

$$\delta \Pi_a = M_t \cdot \delta \theta \tag{2}$$

Von den Schnittkräften sind nur τ_{xy} und τ_{xz} interessant. Da sich in x-Richtung voraussetzungsgemäß alle Querschnitte in der selben Art verwölben, kann die Integration dieser Variablen sofort ausgeführt werden

$$\delta \Pi_i = 1 \cdot \int (\tau_{xy} \cdot \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \delta \gamma_{xz}) \, dF \tag{3}$$

Für die virtuellen Verzerrungen ergeben sich gemäß (10) und (11) des vorangegangenen Kapitels folgende Ausdrücke

$$\delta \gamma_{xy} = \frac{\theta}{1} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{1}{1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z\right) \delta \theta \tag{4}$$

$$\delta \gamma_{xz} = \frac{\theta}{1} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + \frac{1}{1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y\right) \delta \theta \tag{5}$$

Die virtuelle Formänderungsenergie kann jetzt durch Einsetzen von (4) und (5) in (3) berechnet werden.

$$\frac{1}{l}\,\delta\Pi_i = G\,(\frac{\theta}{l})^2 \int[(\frac{\partial\phi}{\partial y} - z)\,\frac{\partial}{\partial y}\,(\delta\phi) + (\frac{\partial\phi}{\partial z} + y)\,\frac{\partial}{\partial z}\,(\delta\phi)]\,dF$$

$$+ G\,\frac{\theta}{l^2}\int[(\frac{\partial\phi}{\partial y} - z)^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial z} + y)^2]\,dF \cdot \delta\theta$$

$$\frac{1}{l}\,\delta\Pi_i = I_1 + I_2 \cdot \delta\theta$$

Das Integral I_2 läßt sich noch weiter umformen

$$I_2 = G \cdot \frac{\theta}{l^2}\int[(\frac{\partial\phi}{\partial y})^2 + (\frac{\partial\phi}{\partial z})^2 - z\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + y\,\frac{\partial\phi}{\partial z} + y\,\frac{\partial\phi}{\partial z} + y^2 - z\frac{\partial\phi}{\partial y} + z^2]\,dF$$

Die ersten beiden Terme werden partiell integriert, die zwei nächsten Glieder mit Hilfe der Greenschen Formel auf ein Linienintegral transformiert.

$$I_2 = G\,\frac{\theta}{l^2}\,(\int[\phi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y} - \int\phi\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dy]\,dz + \int[\phi\frac{\partial\phi}{\partial z} - \int\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}dz]\,dy$$

$$- \int\,[\,\frac{\partial}{\partial y}\,(z\cdot\phi) - \frac{\partial}{\partial z}\,(y\cdot\phi)\,]\,dF$$

$$+ \int\,[(\frac{\partial\phi}{\partial z} + y)\,y - (\frac{\partial\phi}{\partial y} - z)\,z]\,dF\,)$$

$$= G\cdot\frac{\theta}{l^2}\,(\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial y}(\phi^2)\,dz + \frac{\partial}{\partial z}(\phi^2)\,dy - \int\,\phi\cdot\Delta\phi\,dF$$

$$- \int\,(y\cdot\phi)\,dy + (z\cdot\phi)\,dz$$

$$+ \int\,[\,(\frac{\partial\phi}{\partial z} + y)\,y - (\frac{\partial\phi}{\partial y} - z)z\,]\,dF$$

Innerhalb des Feldes gilt $\Delta\phi = o$. Damit fällt das zweite Integral heraus. Die Integrale eins und drei verschwinden, gemäß dem Cauchyschen Integralsatz. Somit reduziert sich das Integral I_2 auf folgenden Ausdruck:

$$I_2 = G\,\frac{\theta}{l^2}\int\,[(\frac{\partial\phi}{\partial z} + y\,)\,y - (\frac{\partial\phi}{\partial y} - z)\,z\,]\,dF$$

Für die virtuelle Formänderungsenergie folgt daraus

$$\delta \Pi_i = G\frac{\theta^2}{l} \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z\right)\frac{\partial}{\partial y}(\delta\phi) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y\right)\frac{\partial}{\partial z}(\delta\phi) \right] dF$$

$$+ G \cdot \frac{\theta}{l} \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y\right) y - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z\right) z \right] dF \cdot \delta\theta$$

Einsetzen in (1) und anschließender Koeffizientenvergleich liefert

$$M_t = G \cdot \frac{\theta}{l} \int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y\right) y - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - z\right) z \right] dF \quad (6)$$

$$\int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z\right)\frac{\partial}{\partial y}(\delta\phi) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y\right)\frac{\partial}{\partial z}(\delta\phi) \right] dF = o \quad (7)$$

Die Beziehung (6) ist schon bekannt. Zur späteren Verwendung bleibt nur die Relation (7) übrig. Zur besseren Übersicht halber bedient man sich der Darstellung in Matrizenform. Aus (7) wird dann

$$\int \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z\right); \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y\right) \right]^t \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(\delta\phi) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\delta\phi) \end{bmatrix} dF = o \quad (8)$$

oder

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial y}(\delta\phi); \frac{\partial}{\partial z}(\delta\phi) \right]^t \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial y} - z \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} + y \end{bmatrix} dF = o \quad (9)$$

Die Methode der Finiten Elemente unterteilt das ursprüngliche Feld in eine Anzahl Einzelfelder und wendet dann zunächst das P.d.v.V. auf diese einzelnen Segmente an. Dabei wird für die unbekannten Verschiebungen ein Ansatz gemacht. Im weiteren soll vorausgesetzt werden, daß ein beliebiger Querschnitt im Innern des Stabes in Dreieckselemente unterteilt worden ist. Beschränkt man sich auf einen linearen Verschiebungsansatz, so hat dieser pro Feld folgende Form:

$$\phi(y,z) = V_u \cdot \underline{\phi} \tag{10}$$

mit

$$V_u = [\, f_1(y,z);\ f_2(y,z);\ f_3(y,z)\,] \tag{11}$$

und

$$\underline{\phi}^t = [\, \phi_1;\ \phi_2;\ \phi_3] \tag{12}$$

Im Zeilenvektor V_u stehen die Verlaufsfunktionen. Im Spaltenvektor $\underline{\phi}$ sind die noch zu bestimmenden Eckpunktverschiebungen enthalten. Für die Funktionsverläufe $f_i\,(y,z)$ gelten noch die Bedingungen

$$f_i\,(y,z) = a_{1i} + a_{2i}\, y + a_{3i}\, z \tag{13}$$

und

$$f_i\,(y_j,\ z_j) = \delta_{ij} \tag{13a}$$

Für die virtuellen Verschiebungen $\delta\phi$ werden die gleichen Verläufe gewählt wie für die wirklichen Verschiebungen. Es gilt folgende Umformung

$$\frac{\partial}{\partial z}\,(\delta\phi) = \frac{\partial}{\partial z}\,(V_u) \cdot \delta\underline{\phi} = \delta\underline{\phi}^t \cdot \frac{\partial}{\partial z}\,(V_u{}^t) \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(\delta\phi) = \frac{\partial}{\partial y}\,(V_u) \cdot \delta\underline{\phi} = \delta\underline{\phi}^t \cdot \frac{\partial}{\partial y}\,(V_u{}^t) \tag{15}$$

Durch Einsetzen von (14) und (15) in (9) folgt

$$\delta\underline{\phi}^t \cdot \int \left[\, \frac{\partial}{\partial y}(V_u{}^t);\ \frac{\partial}{\partial z}(V_u{}^t)\,\right]^t \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(V_u) \\ \frac{\partial}{\partial z}(V_u) \end{bmatrix} dF \cdot \underline{\phi} =$$

$$= \delta\underline{\phi}^t \int \left[\, \frac{\partial}{\partial y}(V_u{}^t);\ \frac{\partial}{\partial z}(V_u{}^t)\,\right]^t \begin{bmatrix} z \\ -y \end{bmatrix} dF \tag{16}$$

(16) läßt sich weiter vereinfachen

$$\delta\underline{\phi}^t \int \left[\, \frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\,\right]^t \cdot V_u{}^t \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot V_u\, dF \cdot \underline{\phi} = \delta\underline{\phi}^t \int \left[\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right]^t \cdot V_u{}^t \begin{bmatrix} z \\ -y \end{bmatrix} dF \tag{17}$$

Es werden folgende formale Operatoren eingeführt

$$D_{\varepsilon u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad u_o = \begin{bmatrix} z \\ -y \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe von $D_{\varepsilon u}$ lautet (17) jetzt

$$\delta\underline{\phi}^t \cdot \int D_{\varepsilon u}{}^t \cdot V_u{}^t \cdot D_{\varepsilon u} \cdot V_u \, dF \cdot \underline{\phi} = \delta\underline{\phi}^t \int D_{\varepsilon u}^t \cdot V_u{}^t \cdot u_o \, dF \qquad (18)$$

Durch Abkürzung mit der Matrizenmultiplikation

$$V_{\varepsilon u} = D_{\varepsilon u} \cdot V_u \qquad (19)$$

läßt sich (18) in der Form schreiben

$$\delta\underline{\phi}^t \cdot \int V_{\varepsilon u}{}^t \cdot V_{\varepsilon u} \, dF \cdot \underline{\phi} = \delta\underline{\phi}^t \int V_{\varepsilon u}{}^t \cdot u_o \, dF \qquad (20)$$

Das Integral auf der linken Seite von (20) stellt die sog. Steifigkeitsmatrix dar

$$S = \int V_{\varepsilon u}{}^t \cdot V_{\varepsilon u} \, dF \qquad (21)$$

Die rechte Seite wird durch den Ausdruck

$$\underline{s} = \int V_{\varepsilon u}{}^t \cdot u_o \, dF \qquad (22)$$

gebildet. Somit gewinnt man zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungen das lineare Gleichungssystem:

$$S \cdot \underline{\phi} = \underline{s} \qquad (23)$$

Die endgültige Gestalt von **S** und $\underline{s}$ muß noch bestimmt werden. Dazu ist es nötig, die Matrix $V_{\varepsilon u}$ auszurechnen.

$$[\, f_1;\ f_2;\ f_3 \,] = V_u$$

$$D_{\varepsilon u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = V_{\varepsilon u} \qquad (24)$$

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix **S** lassen sich jetzt bestimmen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = V_{\varepsilon u}$$

$$V_{\varepsilon u}{}^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial z})^2 ; & \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial z}; & \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial z}; & (\frac{\partial f_2}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial z})^2 ; & \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial z}; & \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial z}; & (\frac{\partial f_3}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f_3}{\partial z})^2 \end{bmatrix}$$

(25)

Die Integration ist uninteressant, da die Elemente von **S** sämtlich konstant sind auf Grund des linearen Ansatzes. Die Matrix kann vor das Integral gezogen werden:

$$\mathbf{S} = \int V_{\varepsilon u}{}^t \cdot V_{\varepsilon u}\, dF = V_{\varepsilon u}{}^t \cdot V_{\varepsilon u} \int dF$$

$$\mathbf{S} = V_{\varepsilon u}{}^t \cdot V_{\varepsilon u} \cdot F \qquad (26)$$

Für die rechte Seite $\underline{s}$ gilt:

$$\underline{s} = \int V_{\varepsilon u}{}^{t} \cdot u_o \, dF$$

$$\begin{bmatrix} z \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\int \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z\frac{\partial f_1}{\partial y} - y\frac{\partial f_1}{\partial z} \\ z\frac{\partial f_2}{\partial y} - y\frac{\partial f_2}{\partial z} \\ z\frac{\partial f_3}{\partial y} - y\frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} dF = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} z_s - \frac{\partial f_1}{\partial z} y_s \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} z_s - \frac{\partial f_2}{\partial z} y_s \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} z_s - \frac{\partial f_3}{\partial z} y_s \end{bmatrix} \cdot F \qquad (27)$$

1.2 Kraftgrößenverfahren

Das Kraftgrößenverfahren stützt sich auf das Prinzip der virtuellen Kräfte, welches folgendes aussagt:

"Ein Verzerrungs-Verschiebungszustand ist kompatibel und erfüllt die geometrischen Randbedingungen, wenn für alle virtuellen, statisch möglichen Schnittkraftzustände die virtuelle äußere Arbeit gleich der virtuellen Formänderungsergänzungsenergie ist" [1]

$$\delta \Pi_i^* = \delta \Pi_a^* \qquad (28)$$

$$\delta \Pi_i^* = 1 \cdot \int \left[\delta \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \delta \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} \right] dF \qquad (29)$$

$$\delta \Pi_a^* = \delta M_t \cdot \theta \qquad (30)$$

Die Verzerrungen und die virtuellen Schnittkräfte lassen sich aus den Gleichungen (17) und (18) des ersten Kapitels ableiten. Daraus folgt

$$\delta \tau_{xy} = -2 G \frac{\theta}{1} \delta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \qquad (31)$$

$$\delta \tau_{xz} = 2 G \frac{\theta}{1} \delta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \qquad (32)$$

(31) und (32) werden in (29) eingesetzt:

$$\frac{1}{l}\,\delta\Pi_i^* = \int \Big[\Big(-2\,G\,\frac{\theta}{l}\,\delta\,\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\Big)\Big(-2\,\frac{\theta}{l}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big) + 2\,G\,\frac{\theta}{l}\,\delta\,\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big)\Big(2\,\frac{\theta}{l}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big)\Big]\,dF$$

$$= G\,\Big(2\,\frac{\theta}{l}\Big)^2 \int \Big[\,\delta\,\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \delta\,\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big]\,dF \qquad (33)$$

Zur Berechnung der virtuellen äußeren Arbeit wird (24a), Kapitel 1 herangezogen.

$$\delta\Pi_a^* = \delta\,M_t \cdot \theta$$

$$= -4\,G\,\frac{\theta^2}{l}\int \delta\Phi(y,z)\,dF \qquad (34)$$

Einsetzen von (33) und (34) in (28) ergibt

$$\int \Big[\,\delta\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \delta\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big]\,dF = -\int \delta\Phi(y,z)\,dF \qquad (35)$$

Analog zur Formänderungsgrößenmethode wird für die Spannungsfunktion Φ ein linearer Verlauf für jedes Dreieckselement angesetzt

$$\Phi(y,z) = V_u \cdot \underline{\Phi} \qquad (36)$$

$$V_u = \big[\, f_1(y,z);\; f_2(y,z);\; f_3(y,z) \,\big]$$

$$\Phi^t = \big[\, \Phi_1;\; \Phi_2;\; \Phi_3 \,\big]$$

Aus (35) folgt mit (36) unter Anwendung der Matrizenschreibweise

$$\int \Big[\,\frac{\partial}{\partial z}(\delta\Phi);\;\frac{\partial}{\partial y}(\delta\Phi)\,\Big]^t \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{bmatrix} dF = -\int \delta\Phi^t\,dF$$

oder

$$\delta\underline{\Phi}^t \int \Big[\,\frac{\partial}{\partial z}(V_u{}^t);\;\frac{\partial}{\partial y}(V_u{}^t)\,\Big] \begin{bmatrix} -\frac{\partial V_u}{\partial z} \\ \frac{\partial V_u}{\partial y} \end{bmatrix} dF = -\delta\underline{\Phi}^t \int V_u{}^t\,dF$$

Mit der Abkürzung

$$D_{\sigma g} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

folgt

$$\delta\underline{\Phi}^t \int D_{\sigma g}{}^t \cdot V_u{}^t \cdot D_{\sigma g} \cdot V_u \, dF \cdot \underline{\Phi} = - \delta\underline{\Phi}^t \int V_u{}^t \, dF$$

Mit

$$V_{\sigma g} = D_{\sigma g} \cdot V_u$$

wird

$$\delta\underline{\Phi}^t \int V_{\sigma g}{}^t \cdot V_{\sigma g} \, dF \cdot \underline{\Phi} = -\delta\underline{\Phi}^t \int V_u{}^t \, dF$$

oder

$$\delta\underline{\Phi}^t \cdot \mathbf{F} \cdot \underline{\Phi} = -\delta\underline{\Phi}^t \cdot \underline{f} \, , \qquad (37)$$

wenn mit **F** die Steifigkeitsmatrix und mit $\underline{f}$ die rechte Seite des Kraftgrößenverfahrens bezeichnet wird.

Die Berechnung der einzelnen Operatoren liefert:

$$\left[f_1(y,z);\ f_2(y,z);\ f_3(y,z) \right] = V_u$$

$$D_{\sigma g} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial z} & -\frac{\partial f_2}{\partial z} & -\frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = V_{\sigma g}$$

Bezüglich der Integration gilt für **F** das gleiche wie für **S**:

$$\mathbf{F} = \int V_{\sigma g}^{\,t} \cdot V_{\sigma g}\, dF$$

$$= V_{\sigma g}^{\,t} \cdot V_{\sigma g} \cdot \int dF$$

$$\mathbf{F} = V_{\sigma g}^{\,t} \cdot V_{\sigma g} \cdot F$$

Somit läßt sich die Steifigkeitsmatrix **F** bestimmen:

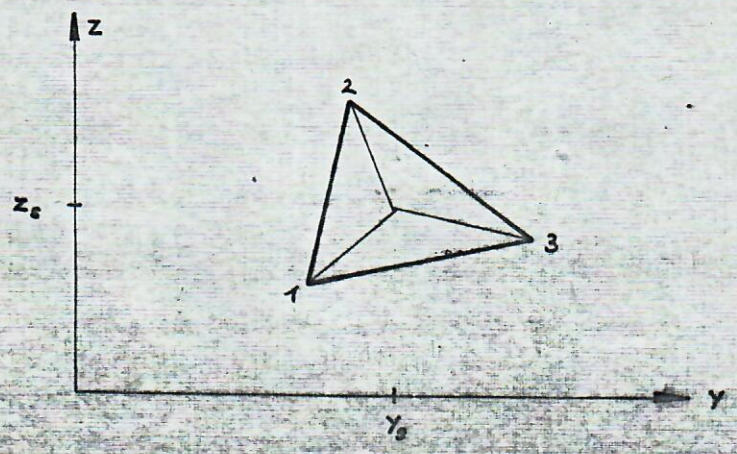
$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial z} & -\frac{\partial f_2}{\partial z} & -\frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = V_{\sigma g}$$

$$V_{\sigma g}^{\,t} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial z})^2 ; & \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial z} ; & \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial z}; & (\frac{\partial f_2}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial z})^2 ; & \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial z}; & \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial z} ; & (\frac{\partial f_3}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f_3}{\partial z})^2 \end{bmatrix}$$

1.3 Berechnung der Ansatzfunktionen

Zur Konkreten Berechnung der Steifigkeitsmatrix müssen die Ansatzfunktionen bestimmt werden.

Bild 4:



$$y_s = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \tag{38}$$

$$z_s = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \tag{39}$$

Der lineare Ansatz für den Eckpunkt 1 soll folgenden Bedingungen entsprechen

$$f_1(y_1, z_1) = a_{11} + a_{21}\, y_1 + a_{31}\, z_1 = 1 \tag{40}$$

$$f_1(y_2, z_2) = a_{11} + a_{21}\, y_2 + a_{31}\, z_2 = 0 \tag{41}$$

$$f_1(y_3, z_3) = a_{11} + a_{21}\, y_3 + a_{31}\, z_3 = 0 \tag{42}$$

Aus den Beziehungen (40) bis (42) lassen sich die unbekannten Koeffizienten a_{i1} $(i=1,2,3)$ mit Hilfe der Cramerschen Regel gewinnen.

Für die Koeffizientendeterminante des LGS bekommt man, wenn mit F der Flächeninhalt bezeichnet wird

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2F$$

Jetzt lassen sich die Unbekannten ermitteln

$$a_{11} = \frac{1}{2F} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ o & y_2 & z_2 \\ o & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{y_2 z_3 - y_3 z_2}{2F}.$$

$$a_{21} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} 1 & 1 & z_1 \\ 1 & o & z_2 \\ 1 & o & z_3 \end{bmatrix} = \frac{z_2 - z_3}{2F}$$

$$a_{31} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} 1 & y_1 & 1 \\ 1 & y_2 & o \\ 1 & y_3 & o \end{bmatrix} = \frac{y_3 - y_2}{2F}$$

Somit läßt sich $f_1(y,z)$ hinschreiben

$$f_1(y,z) = \frac{1}{2F} (y_2 z_3 - y_3 z_2 + (z_2 - z_3) y + (y_3 - y_2) z) \quad (43)$$

Der Einfachheit halber sollen folgende Abkürzungen eingeführt werden:

$$z_{23} := z_2 - z_3$$

$$y_{32} := y_3 - y_2$$

Somit erhält man die endgültige Form für $f_1(y,z)$

$$f_1(y,z) = \frac{1}{2F} (y_2 z_3 - y_3 z_2 + z_{23} \cdot y + y_{32} \cdot z) \quad (44)$$

Die anderen Funktionen gewinnt man durch zyklische Vertauschung

$$f_2(y,z) = \frac{1}{2F} (y_3 z_1 - y_1 z_3 + z_{31} \cdot y + y_{13} \cdot z) \quad (45)$$

$$f_3(y,z) = \frac{1}{2F} (y_1 z_2 - y_2 z_1 + z_{12} \cdot y + y_{21} \cdot z) \quad (46)$$

1.4 Berechnung der Steifigkeitsmatrizen und der rechten Seiten

Aus den Gleichungen (44) bis (46) werden folgende Ableitungen benötigt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1}{2F} \cdot z_{23} \tag{47}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{2F} \cdot z_{31} \tag{48}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{1}{2F} \cdot z_{12} \tag{49}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{1}{2F} \cdot y_{32} \tag{50}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{1}{2F} \cdot y_{13} \tag{51}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{1}{2F} \cdot y_{21} \tag{52}$$

Mit Kenntnis der Relationen (47) bis (52) läßt sich die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{S}$ gemäß (25) sofort hinschreiben. Wie früher schon erwähnt, kann die Integration sofort ausgeführt werden.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{(2F)^2} \begin{bmatrix} z_{23}^2+y_{32}^2; & z_{23}\, z_{31}+y_{32}\, y_{13}; & z_{23}\, z_{12}+y_{32}\, y_{21} \\ z_{23}\, z_{31}+y_{32}\, y_{13}; & z_{31}^2+y_{13}^2; & z_{31}\, z_{12}+y_{13}\, y_{21} \\ z_{23}\, z_{12}+y_{32}\, y_{21}; & z_{31}\, z_{12}+y_{13}\, y_{21}; & z_{12}^2+y_{21} \end{bmatrix} \cdot F \tag{53}$$

Die rechte Seite $\underline{s}$ geht aus (27) hervor

$$\underline{s} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} z_{23} \cdot z_s - y_{32} \cdot y_s \\ z_{31} \cdot z_s - y_{13} \cdot y_s \\ z_{12} \cdot z_s - y_{21} \cdot y_s \end{bmatrix} \cdot F \qquad (54)$$

Da die Steifigkeitsmatrix **F** des Kraftgrößenverfahrens mit der des Formänderungsverfahrens identisch ist, verbleibt nur noch die rechte Seite $\underline{f}$ gemäß (37) zu bestimmen

$$\underline{f} = \int V_u^{\,t} \, dF \qquad (55)$$

$$\underline{f} = \int \begin{bmatrix} f_1(y,z) \\ f_2(y,z) \\ f_3(y,z) \end{bmatrix} \cdot dF$$

Mit den Beziehungen (44), (45) und (46) folgt

$$\underline{f} = \frac{1}{2F} \int \begin{bmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 + z_{23} y + y_{32} z \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 + z_{31} y + y_{13} z \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 + z_{12} y + y_{21} z \end{bmatrix} dF \qquad (56)$$

Die Integration liefert

$$\underline{f} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 + z_{23} y_s + y_{32} z_s \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 + z_{31} y_s + y_{13} z_s \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 + z_{12} y_s + y_{21} z_s \end{bmatrix} \cdot F \qquad (57)$$

(57) wird mit (38) und (39) noch weiter umgeformt, so daß schließlich folgender einfacher Ausdruck übrigbleibt.

$$\underline{f} = \frac{1}{2F} \cdot \frac{2F}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot F \qquad (58)$$

Mit Kenntnis von (53), (54), und (58) können beide LGSe für ein Einzelfeld aufgestellt werden.

1.5 Ermittlung der Schubspannungen

In der Praxis interessiert vor allem die Schubspannungsverteilung über den Querschnitt. Ist die Verwölbung oder die Torsionsfunktion bekannt, so können die Schubspannungen gemäß (10) und (11) bzw. (17) und (18), Kapitel 1, errechnet werden. Zur näherungsweisen Bestimmung der partiellen Ableitung bieten sich mehrere Wege an.

Der einfachste Weg geht über die Methode der finiten Elemente. Danach gilt

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial V_u}{\partial y} \cdot \underline{\phi} \qquad (59)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial V_u}{\partial z} \cdot \underline{\phi} \qquad (60)$$

In skalarer Schreibweise bedeuten (59) und (60)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2F} \left(z_{23} \cdot \phi_1 + z_{31} \cdot \phi_2 + z_{12} \cdot \phi_3 \right) \qquad (61)$$

und

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2F} \left(y_{32} \cdot \phi_1 + y_{13} \cdot \phi_2 + y_{21} \cdot \phi_3 \right) \qquad (62)$$

Für die Torsionsfunktion $\phi(y,z)$ gilt entsprechendes. (61) und (62) lassen sich einfach programmieren. Der Nachteil besteht darin, daß kein stetiger Schnittkraftverlauf erreicht wird. Zum Beweis nehme man sich den Innenpunkt (i). An diesem Punkt müssen mindestens drei Dreiecke grenzen. Jedes Dreieck besitzt aber andere partielle Ableitungen, die Sprünge zur Folge haben.

Eine bessere Genauigkeit und ein stetiger Schnittkraftverlauf wird durch Anwendung von Differenzenformeln erzielt. Die einfachste Formel lautet

für einen Innenpunkt(i)

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{1}{2h} \boxed{-1 \quad \boxed{0} \quad 1} \cdot \phi_i - \frac{h^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial y^3} - \ldots . \quad (63)$$

für einen Randpunkt(r)

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial y} = \frac{1}{2h} \boxed{-3 \quad 4 \quad -1} \cdot \phi_r + \frac{h^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 \phi_r}{\partial y^3} + \ldots . \quad (64)$$

Zur Aufstellung des Sterns muß ein neues Programm geschrieben werden. In einem späteren Beispiel sind die Ergebnisse von (61) bzw. (62) mit denen von (63) und (64) verglichen worden.

2. Gesamtsystem

Beim Übergang vom Einzelsystem zum Gesamtsystem ist auf die geometrische und statische Verträglichkeit zu achten.

2.1 Formänderungsgrößenverfahren

Die geometrische Verträglichkeit erfordert beim Formänderungsgrößenverfahren Übereinstimmung der Verschiebungen der einzelnen Dreiecke in den Knotenpunkten. Wird dies gewährleistet, ist infolge des linearen Ansatzes auch gleichzeitig der Verschiebungsverlauf längs der Kanten stetig. Im Vektor $\underline{\phi}^*$ werden die Elementknotenverschiebungen aller Dreiecke zusammengefaßt

$$\underline{\phi}^{*} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(5) (6)

Ist die Anzahl der Dreiecke m, so besteht $\underline{\phi}^{*}$ aus 3 m Elementen.

Der Vektor $\underline{\phi}^{**}$ enthält als Elemente die Systemknotenverschiebungen. Bei n Knoten enthält $\underline{\phi}^{**}$ n Elemente

$$\underline{\phi}^{**} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi m_1 \\ \phi n \end{bmatrix}$$

Durch die Gleichung

$$\underline{\phi}^{*} = A \cdot \underline{\phi}^{**} \qquad (65)$$

wird der Zusammenhang zwischen den Elementknoten- und Systemverschiebungen hergestellt. Die Matrix A hat 3m Zeilen und n Spalten. In jeder Zeile steht genau einmal eine eins, sonst nur Nullen. Wegen des geringen Informationsgehalts dürfte sich dieser Weg kaum zur Programmierung anbieten.

Die statische Verträglichkeit wird mit dem P.d.v.V. formuliert. Die gesamte potentielle Energie des Feldes setzt sich nur aus der potentiellen Energie der Einzelfelder zusammen, da keine Linienlasten längs der Ränder oder Einzelkräfte in den Knoten angreifen. Für die virtuellen Verschiebungen wird ebenso ein linearer Verlauf gewählt wie für die wirklichen Verschiebungen. Damit wird schon geometrische Verträglichkeit und lineare Unabhängigkeit erzielt

$$\delta\underline{\phi}^{*} = A \cdot \delta\underline{\phi}^{**} \tag{66}$$

Der virtuelle Verschiebungsverlauf wird beschrieben durch

$$\delta\phi^{*} = V_u^{*} \cdot \delta\underline{\phi}^{*} = V_u^{*} \cdot A \cdot \delta\underline{\phi}^{**} \tag{67}$$

Gleichung (67) besagt, daß $\delta\phi^{*}$ z.B. im Knoten k den Wert eins und in allen anderen den Wert Null hat. Der virtuelle Verzerrungsverlauf lautet:

$$\delta\varepsilon^{*} = \frac{\partial}{l} V_{\varepsilon u}^{*} \cdot \delta\underline{\phi}^{*} = \frac{\theta}{l} V_{\varepsilon u}^{*} \cdot A \cdot \underline{\phi}^{**}$$

Die Steifigkeitsmatrizen werden längs der Hauptdiagonalen zu einer neuen Gesamtmatrix zusammengefaßt.

$$\boldsymbol{S}^{*} = \begin{bmatrix} S_1 & & & & & \\ & S_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & S_{n-1} \\ & & & & & & S_n \end{bmatrix} \tag{68}$$

$\boldsymbol{S}^{*}$ ist eine quadratische Matrix von der Ordnung 3m Die einzelnen rechten Seiten werden in einem neuen Vektor untereinander geschrieben

$$\underline{s}^{*} = \begin{bmatrix} \underline{s}_1 \\ \underline{s}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{s}_{n-1} \\ \underline{s}_n \end{bmatrix} \tag{69}$$

Somit kann das P.d.v.V. für das Gesamtsystem hingeschrieben werden

$$\delta\underline{\phi}^{*\,t} \cdot \mathbf{S}^{*} \cdot \underline{\phi} = \delta\underline{\phi}^{*\,t} \cdot \underline{s}^{*} \tag{70}$$

In (70) müssen noch (65) und (66) eingesetzt werden

$$\delta\underline{\phi}^{**\,t} \cdot A^{t} \cdot \mathbf{S}^{*} \cdot A \cdot \underline{\phi}^{**} = \delta\underline{\phi}^{**\,t} \cdot A^{t} \cdot \underline{s}^{*} \tag{71}$$

oder

$$\delta\underline{\phi}^{**\,t} \cdot \mathbf{S}^{**} \cdot \underline{\phi}^{**} = \delta\underline{\phi}^{**\,t} \cdot \underline{s}^{**} \tag{72}$$

Das LGS für die n unbekannten Knotenverschiebungen lautet

$$\mathbf{S}^{**} \cdot \underline{\phi}^{**} = \underline{s}^{**} \tag{73}$$

Zur besseren Übersicht werden die Matrizen noch einmal schematisch angeschrieben:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{-n-} \begin{bmatrix} A^{t} \end{bmatrix}_{-3m-} \begin{bmatrix} S^{*} \end{bmatrix}_{-3m-} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{-n-} \begin{bmatrix} \phi^{**} \end{bmatrix}_{-1-} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{-n-} \begin{bmatrix} A^{t} \end{bmatrix}_{-3m-} \begin{bmatrix} s^{*} \end{bmatrix}_{-1-}$$

Die obige Anordnung zeigt deutlich, daß $\mathbf{S}^{**}$ eine quadratische Matrix von der Ordnung n ist. Sie hat noch die Eigenschaft, daß sämtliche Zeilensummen und aus Symmetriegründen auch die Spaltensummen verschwinden. Das war schon bei der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}$ der Fall.

2.2 Kraftgrößenverfahren

Das Kraftgrößenverfahren verlangt analoge Schritte beim Übergang vom Einzelsystem zum Gesamtsystem.

Zunächst muß für Stetigkeit der Schnittkräfte in den Knotenpunkten gesorgt werden. Wird die gleiche Unterteilung und Numerierung des Querschnittes wie beim Formänderungsgrößenverfahren vorausgesetzt, so wird der Zusammenhang zwischen Elementschnittkräften und Systemschnittkräften wieder durch die Matrix A beschrieben.

$$\underline{\Phi}^{*} = A \cdot \underline{\Phi}^{**} \tag{75}$$

Infolge des linearen Ansatzes wird damit zugleich auch ein stetiger Schnittkraftverlauf längs der Kanten gesichert. Bei den virtuellen Schnittkräften ist auf die statische Verträglichkeit zu achten. Das bedeutet, daß am Rand gemäß (22), Kapitel 1, die $\delta\underline{\phi}$-Werte zu Null gewählt werden müssen. Die Matrix A verbindet wieder virtuelle Element- mit Systemschnittkräften

$$\delta\underline{\Phi}^{*} = A \cdot \delta\underline{\Phi}^{**} \tag{76}$$

Virtueller Schnittkraftverlauf:

$$\delta\Phi^{*} = V_u^{*} \cdot \delta\underline{\Phi}^{*} = V_u^{*} \cdot A \cdot \delta\underline{\Phi}^{**}$$

Auch jetzt treten weder Linienlasten noch Einzelkräfte im Feld auf. Die Steifigkeitsmatrizen und rechten Seiten werden in der gleichen Art und Weise aneinander gereiht wie in (68) und (69). Somit kann das P.d.v.K. für das Gesamtsystem formuliert werden

$$\delta\underline{\Phi}^{*t} \cdot \mathbf{F}^{*} \cdot \underline{\Phi}^{*} = - \delta\underline{\Phi}^{*t} \cdot \underline{f}^{*} \tag{77}$$

In (77) müssen noch (75) und (76) Verwendung finden

$$\delta\underline{\Phi}^{**t} \cdot A^{t} \cdot \mathbf{F}^{*} \cdot A \cdot \underline{\Phi}^{**} = - \delta\underline{\Phi}^{**t} \cdot A^{t} \cdot \underline{f}^{*}$$

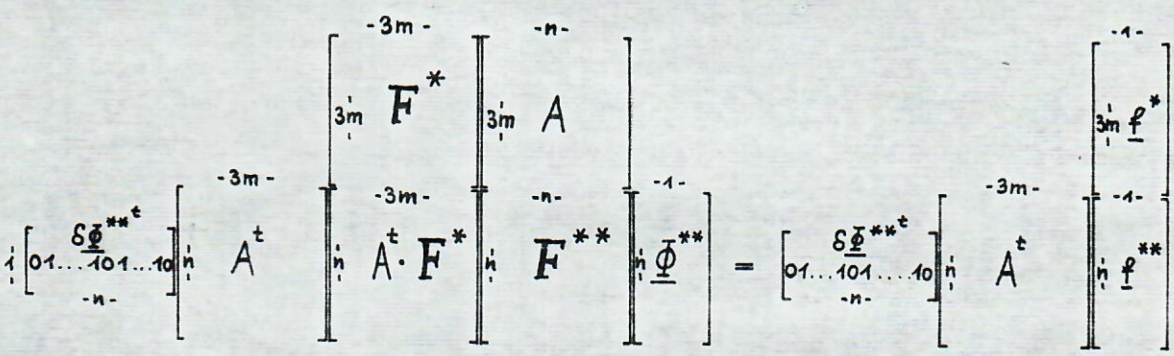
oder

$$\delta\underline{\Phi}^{**t} \cdot \mathbf{F}^{**} \cdot \underline{\Phi}^{**} = - \delta\underline{\Phi}^{**t} \cdot \underline{f}^{**} \tag{78}$$

Die Beziehung (78) liefert das inhomogene LGS

$$\mathbf{F}^{**} \cdot \underline{\Phi}^{**} = - \underline{f}^{**} \tag{79}$$

Schematische Darstellung:



2.3 Rangabfall

Sind die LGSe (73) und (80) aufgestellt, so muß bei der praktischen Lösung noch der Rangabfall eins der Steifigkeitsmatrix berücksichtigt werden.

Dies wird beim Formänderungsgrößenverfahren durch Vorgabe einer beliebigen unbekannten Verschiebung erreicht.

Die Kraftgrößenmethode verlangt noch zusätzlich den Einbau der Randbedingung (22), Kapitel 1. Den Rangabfall erzielt man wieder durch Vorgabe eines Spannungsfunktionswertes. Während beim zuvor erwähnten Verfahren diese Wahl noch willkürlich sein konnte, ohne daß der Schubspannungsverlauf beeinträchtigt wird, muß jetzt infolge der Randbedingung dieser Wert exakt eingegeben werden. Dazu steht nocht die Gleichung aus dem 1. Kapitel

$$M_t = -4\ G\ \frac{\theta}{l} \int \Phi\ dF$$

oder

$$I_t = -4 \int \Phi\ dF$$

zur Verfügung. Man ist also gezwungen, iterativ vorzugehen. Es muß verglichen werden, ob das Volumen, das die Torsionsfunktion über den Querschnitt aufspannt, dem Torsionsmoment in der angegebenen Weise entspricht. Ist das nicht der Fall, muß nach einer Korrektur des vorgegebenen Φ-Wertes noch einmal das LGS gelöst werden.

Da die Integration der Torsionsfunktion numerisch ausgeführt werden muß, wird auf die schon vorhandene Unterteilung des Querschnitts zurückgegriffen. Die Werte in den Knotenpunkten sind bekannt. Dazwischen wird ein linearer Verlauf angenommen. Das Volumen pro Einzelfeld beläuft sich auf

$$V = \frac{1}{3} \left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \right) \cdot F$$

Summation aller Einzelvolumina ergibt angenähert das Gesamtvolumen. Dieser Weg ist leicht zu programmieren. Zusätzlich muß allerdings noch das Verhältnis $\frac{M_t}{\theta}$ experimentell gewonnen werden. Die angenäherte Volumenbestimmung induziert einen Fehler bei der Lösung des LGSs, der sich auch später auf die Genauigkeit der Schubspannungen auswirkt. Im Fall der reinen Torsion wäre somit das Kraftgrößenverfahren umständlicher zu handhaben als die Formänderungsgrößenmethode.

Eine kurze Zusammenfassung und Gegenüberstellung der beiden Prinzipien sieht folgendermaßen aus:

P.d.v.V.

$$\delta\Pi_i = \delta\Pi_a$$

$$\delta\Pi_i = \int (\tau_{xy} \cdot \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \delta\gamma_{xz})\, dF$$

$$\delta\Pi_a = M_t \cdot \delta\theta$$

Verschiebungsansatz:

$$\phi(y,z) = V_u \cdot \underline{\phi}$$

Finite Gleichungen Einzelsystem:

$$\delta\underline{\phi}^t \cdot \mathbf{S} \cdot \underline{\phi} = \delta\underline{\phi}^t \cdot \underline{s}$$

Gesamtsystem:

$$\delta\underline{\phi}^{**\,t} \cdot \mathbf{S}^{**} \cdot \underline{\phi}^{**} = \delta\underline{\phi}^{**\,t} \cdot \underline{s}^{**}$$

LGS:

$$\mathbf{S}^{**} \cdot \underline{\phi}^{**} = \underline{s}^{**}$$

P.d.v.K.

$$\delta\Pi_i^* = \delta\Pi_a^*$$

$$\delta\Pi_i^* = \int (\delta\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \delta\tau_{xz} \cdot \gamma_{xz})\, dF$$

$$\delta\Pi_a^* = \delta M_t \cdot \theta$$

Spannungsfunktionsansatz:

$$\Phi(y,z) = V_u \cdot \underline{\Phi}$$

Finite Gleichungen Einzelsystem:

$$\delta\underline{\Phi}^t \cdot \mathbf{F} \cdot \underline{\Phi} = \delta\underline{\Phi}^t \cdot \underline{f}$$

Gesamtsystem:

$$\delta\underline{\Phi}^{**\,t} \cdot \mathbf{F}^{**} \cdot \underline{\Phi}^{**} = -\delta\underline{\Phi}^{**\,t} \cdot \underline{f}^{**}$$

LGS:

$$\mathbf{F}^{**} \cdot \underline{\Phi}^{**} = -\underline{f}^{**}$$

Die Identität der beiden Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{S}^{**}$ und $\mathbf{F}^{**}$ liegt offenbar in der Tatsache begründet, daß die DGlen der Funktionen $\phi(y,z)$ und $\Phi(y,z)$ auf der linken Seite auch identisch sind.

Aus den DGLen ist ersichtlich, daß die Lösungen nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind. Zum Beweis ersetze man z.B. $\phi(y,z)$ durch

$$\bar{\phi}(y,z) = \phi(y,z) + \phi_o$$

Einsetzen in DGL ergibt

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\phi} &\overset{?}{=} 0 \\ \Delta\,(\phi + \phi_o) &= 0 \\ \Delta\phi + \Delta\phi_o &= 0 \\ \Delta\phi &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

oder

Diese Eigenschaft muß auf Grund der Linearität der Operatoren auch bei den Steifigkeitsmatrizen zum Ausdruck kommen. Dementsprechend wird z.B. dem Lösungsvektor $\underline{\phi}$ ein beliebiger anderer Vektor ϕ_o mit

$$\phi_{o1} = \phi_{o2} = \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot = \phi_{on} = \text{const.} \qquad (81)$$

überlagert.

$$\bar{\underline{\phi}} = \underline{\phi}^{**} + \phi_o .$$

Einsetzen in LGS liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{**} \cdot \bar{\underline{\phi}} &\overset{?}{=} \underline{s}^{**} \\ \mathbf{S}^{**} (\underline{\phi}^{**} + \phi_o) &= \underline{s}^{**} \\ \mathbf{S}^{**} \cdot \underline{\phi}^{**} + \mathbf{S}^{**} \cdot \phi_o &= \underline{s}^{**} \end{aligned} \qquad (82)$$

Notwendig und hinreichend zur Lösung von (82) ist

$$\mathbf{S}^{**} \cdot \phi_o \overset{!}{=} 0 \qquad (83)$$

Die homogene Gleichung (83) besagt, daß der Rangabfall von $\mathbf{S}^{**}$ mindestens eins sein muß. Die willkürliche Vorgabe einer Konstanten entspricht einer Verschiebung der gesamten Verwölbungsfläche in Stabachsenrichtung.

Die Charakteristik der Verwölbung wird dadurch nicht beeinträchtigt. Diese ändert sich erst bei beliebiger Vorgabe mehrerer ϕ^{**}-Werte, beziehungsweise einem Rangabfall größer eins. Diese Lösung des LGS widerspräche aber der Lösung, die die zugehörige DGl liefert. Somit muß der Rangabfall gleich eins sein. Wird ein Lösungsvektor ϕ_o mit der Eigenschaft (81) in (83) eingesetzt und berücksichtigt man, daß die Zeilensummen von S^{**} sämtlich verschwinden, so liefert die Probe von (83), daß das LGS tatsächlich erfüllt wird.

3. Kapitel: Lösung praktischer Beispiele mit Hilfe eines FORTRAN-Programms

1. Indextafel

Die Indextafel übernimmt die Aufgabe, für die Zuordnung zwischen lokalen und globalen Unbekannten zu sorgen. Das geschieht in einer Liste mit drei Spalten und m Zeilen, wenn m die Anzahl der Dreiecke ist. Die k-te Zeile wird dem k-ten Dreieck zugeordnet. In den betreffenden Spalten steht jetzt die globale Bezifferung der Unbekannten in der Reihenfolge der ursprünglichen lokalen Bezeichnung. Zunächst wird damit geometrische Verträglichkeit erreicht. Um die Matrizen $\mathbf{S}^*$ bzw. $\mathbf{F}^*$ von der Ordnung 3m auf die Ordnung n zu transformieren, kann an Stelle der Matrix A die Indextafel treten. Wie man durch Anschreiben der LGSe, die aus (70) und (77), Kapitel 2 entstehen, sieht, können die lokalen Unbekannten ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 der einzelnen Steifigkeitsmatrizen durch Aufsuchen der entsprechenden Zeile in der Indextafel durch globale Unbekannte ersetzt werden. Dann werden die Spalten mit gleichen Unbekannten zusammengefaßt. So wie z.B. die l-te Spalte in die k-te Spalte rutscht, so verschiebt sich aus Symmetriegründen simultan auch die l-te Zeile in die k-te Zeile. Das Endergebnis sind die Matrizen $\mathbf{S}^{**}$ und $\mathbf{F}^{**}$ bzw. $\underline{s}^{**}$ und $\underline{f}^{**}$.

2. Aufbau des FORTRAN-Programms

Im Hauptprogramm werden im wesentlichen Daten eingelesen, Unterprogramme aufgerufen und Endresultate ausgedruckt. Das Unterprogramm SuB1 übernimmt die Berechnung der einzelnen Steifigkeitsmatrizen mit den rechten Seiten und deren globale Einordnung in das Gesamtsystem. Das Unterprogramm GAJO dient zur Lösung des LGSs. In SUB2 werden die Schubspannungen nach einer Formel der FEM ermittelt. Die Berechnung der Schubspannungen nach einer Differenzenformel erfolgt im Unterprogramm TAU.

3. Beispiele

Da für den Fall des gleichseitigen Dreiecks eine analytische Lösung existiert, wurde das Programm an diesem Beispiel überprüft und zwar für beide Verfahren. Mit der Formänderungsgrößenmethode wurde noch ein I-Querschnitt gerechnet. Die geometrischen Abmessungen entnehme man den Skizzen.

4. Kurze Diskussion der Ergebnisse

4.1 Gleichseitiges Dreieck

Wie zu ersehen ist, werden die Verwölbung bzw. die Torsionsfunktion praktisch exakt ermittelt. Aus diesen diskreten Werten wurden dann die Schubspannungen errechnet. Die Formel nach FEM liefert offensichtlich nur sehr grobe Werte. Wesentlich besser liegen schon die Ergebnisse mit Hilfe von Differenzenformeln. Da bei diesem besonderen Beispiel die exakten Lösungen bekannt sind, ist man in der Lage den Fehler der Differenzengleichungen zu bestimmen. Mit den geometrischen Abmessungen

$$h = \frac{3}{2} \tag{1}$$

und

$$b = \sqrt{3} \tag{2}$$

ergeben sich folgende Werte

für die Verwölbung

$$\phi = \frac{1}{3} \left(3z^2y - y^3 \right) \tag{3}$$

und für die Torsionsfunktion

$$\Phi = -\frac{1}{6} \left(z^3 - 3\,zy^2 - \frac{3}{2} (z^2+y^2) + \frac{1}{2} \right) \tag{4}$$

Daraus lassen sich die Schubspannungen gewinnen

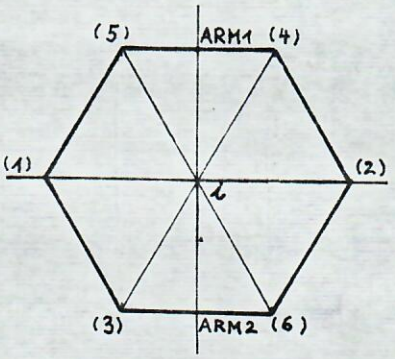
$$\tau_{xy} = (z^2 - z - y^2) \frac{M_t}{I_t} \qquad (5)$$

$$\tau_{xz} = (2yz + y) \frac{M_t}{I_t} \qquad (6)$$

Der Quotient $\frac{M_t}{I_t}$ ist im weiteren eins gesetzt worden.

Zur Aufstellung des Sterns der Differenzenformel ist folgende Technik angewandt worden. Für den Innenpunkt i wurden die Umgebungspunkte aufgesucht und global numeriert.

Bild 5:



Die partielle Ableitung nach y läßt sich an der Stelle i sofort hinschreiben. Aus den Punkten (4) und (5) bzw. (3) und (6) wurde ein arithmetischer Mittelwert aufgestellt. Mit Kenntnis von ARM 1 und ARM 2 konnte die partielle Ableitung nach z gebildet werden. Entgegen aller Erwartung ergaben sich hier fast die exakten Werte. Für die y-Richtung verbleibt noch, den zugehörigen Fehler gemäß

$$-\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \qquad (7)$$

bzw.

$$-\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \qquad (8)$$

zu bestimmen. Aus (3) bzw. (4) erhält man

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} = -2 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} = 0 \qquad (10)$$

Für das Formänderungsgrößenverfahren bedeutet das, daß z.B. bei der Schrittweite

$$h_y = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

die Näherung von τ_{xy} um den Wert

$$e_y = 0{,}006949$$

im Feld kleiner sein muß als der exakte Wert. Beim Kraftgrößenverfahren müssen für die τ_{xz} im Feld sogar mit (10) die genauen Ergebnisse vorliegen.

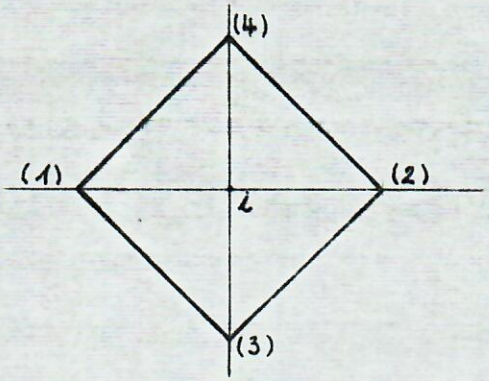
Für Randpunkte wird die Formel (64), Kapitel 2, herangezogen. Wie man (64), Kapitel 2, weiter entnehmen kann, ist der Fehler am Rand vorzeichenverkehrt und doppelt so groß wie der im Feld. Die praktische Rechnung liefert auch dieses Ergebnis. Allerdings ist es schwer, bis in die Ecken des Dreiecks zu approxiemieren. Hier liegen die Werte wegen erneuter Mittelwertbildung schlechter. In z-Richtung bleibt am Rand das gute Verhalten des Fehlers im Feld nicht erhalten. Durch die Mittelung ergeben sich unterschiedliche Abweichungen für die einzelnen Randpunkte.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß die guten Ergebnisse sicherlich auf die besondere Unterteilung des Querschnitts zurückzuführen sind. Die kleinste Unterteilung mit zehn Unbekannten lieferte schon die exakten Werte für die Verwölbung. Bei beliebigen Querschnitten mit unregelmäßiger Unterteilung dürften solche Ergebnisse nicht erwartet werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

4.2 I-Querschnitt

Die Berechnung der Schubspannungen nach Differenzenformel erfolgte mittels eines besonderen Sterns des Punktes i

Bild 6:



Wie man sieht können die Ableitungen in beiden Richtungen sofort hingeschrieben werden.

Da hier keine exakte Lösung existiert, ist man gezwungen, sich auf einige Aussagen bezüglich der Schubspannungen am Rande zu beschränken. Die einfachste Kontrolle ist die, ob der Schubspannungsvektor die Randkurve tangiert. Infolge der Orthogonalität der eizelnen Randabschnitte muß entweder τ_{xy} oder τ_{xz} verschwinden. Diese Forderung wird nur relativ schlecht erfüllt. Dies gilt insbesondere für Eckpunkte, in denen sich die Schubspannung zu Null ergeben müßte. Man muß jedoch berücksichtigen, daß der Fehler am Rand doppelt so groß ist wie im Feld. Im Knoten 109 (siehe Skizze) liegt eine sehr große Abweichung vom theoretischen Wert Null vor. Dies läßt an dieser Stelle auf eine Spannungsspitze schließen.

Das gute Fehlerverhalten bezüglich Verwölbung und Schubspannungen wie beim gleichseitigen Dreieck wiederholt sich hier nicht.

Kapitel 4: Erweiterung der reinen Torsion in den plastischen Bereich mit ideal-plastischem Werkstoffverhalten

1. Grundgleichungen der plastischen Torsion

Wird der Kreis als Fließgrenzkurve angenommen, so gilt nach der von v. Mises aufgestellten Fließbedingung

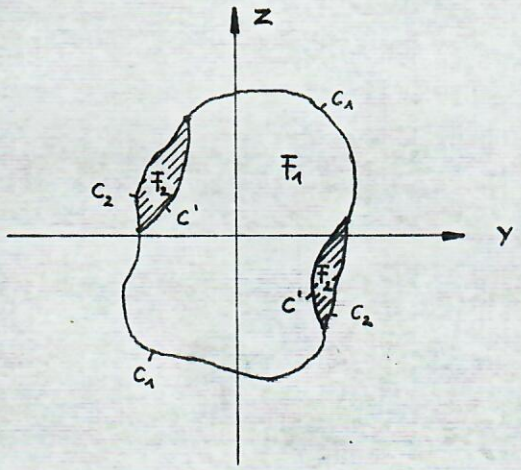
$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+ 6(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)= 2\sigma_{vo}^2 \qquad (1)$$

Unter σ_{vo} versteht man die einachsige Vergleichsspannung, bei der das Material zu fließen beginnt, d.h. σ_{vo} entspricht dem Beginn eines nichtlinearen Zusammenhanges zwischen Spannung und Verzerrung. Für den Fall reiner Torsion liefert (1)

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\sigma_{vo} \qquad (2)$$

Wird das Torsionsmoment ständig erhöht, so wird der kritsche Wert gemäß (2) in einem oder mehreren Punkten am Rande erreicht, da hier immer die größte Schubspannung auftritt. Wächst die Belastung weiter, so bildet sich ein plastischer Bereich F_2 aus, der vom Rand ins Innere zunimmt.

Bild 7:



Die in Kapitel 1 vollzogenen Ansätze werden dahingehend erweitert, daß die Verwölbungs- und Spannungsfunktion jetzt allgemeiner angeschrieben werden

$$\phi = \phi(y,z,\theta) \qquad (3)$$

$$\Phi = \Phi(y,z,\theta) \qquad (4)$$

Somit gilt für die Schubspannungen

$$\tau_{xy} = - 2 \frac{G}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{5}$$

$$\tau_{xz} = 2 \frac{G}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{6}$$

Die Verschiebungen v und w bleiben erhalten, während u gemäß (3) abgeändert wird

$$u = \frac{1}{l} \phi(y,z,\theta) \tag{7}$$

Im elastischen Bereich F_1 gelten folgende Spannungs-Deformationsbeziehungen:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{G}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \theta z\right) \tag{8}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = \frac{G}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \theta y\right) \tag{9}$$

Da (8) mit (5) und (9) mit (6) äquivalent sein muß, werden die Gleichungen partiell differentiert und man gewinnt für die Spannungsfunktion in F_1

$$\Delta \Phi = \theta \tag{10}$$

Im plastischen Bereich dagegen ist die Schubspannung konstant

$$\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \frac{1}{3} \sigma_{vo}^2 \tag{11}$$

In (11) werden (5) und (6) eingesetzt. Man erhält

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_{vo} l}{2 G}\right)^2 = k^2 \tag{12}$$

Die linke Seite von (12) repräsentiert den Absolutbetrag von grad Φ ins Quadrat, so daß (12) kürzer geschrieben werden kann

$$| \text{grad } \Phi | = k \tag{13}$$

Geometrisch gesehen bedeutet (13), daß die Torsionsfunktion im plastischen Bereich eine Fläche konstanter maximaler Steigung darstellt. Die Randbedingung, daß der Schubspannungsvektor die Randkurve tangieren muß, bleibt von der Plastizität unberührt. Somit gilt sowohl auf C_1 wie auf C_2

$$\Phi\ (y,z) = o \qquad (14)$$

Im plastischen Gebiet wäre die Torsionsfunktion damit bestimmt. Im elastischen Teil des Querschnitt kann man die Schubspannungen erst nach Kenntnis der Trennlinie C' unter der Forderung, daß der Schubspannungsvektor entlang C' stetig verlaufen muß, berechnen.

Das Torsionsproblem ist gelöst, wenn für den konstant gehaltenen Parameter θ, eine Torsionsfunktion $\Phi(y,z)$ $\epsilon\ C^2$ gefunden worden ist, die im elastischen Feld die Bedingung (13) und auf dem Rand (14) befriedigt. Experimentelle Lösungen können durch eine Erweiterung der Membrananalogie gefunden werden.

2. Aufstellen der finiten Gleichungen

2.1 Spannungs-Deformations-Beziehungen

Um die finiten Gleichungen bestimmen zu können, müssen die Spannungs-Deformations-Beziehungen bekannt sein.

Die Spannungs-Verzerrungsrelationen werden im wesentlichen durch zwei Gesetze vertreten. Das finite Gesetz von Hencky besagt, daß der Deformationsdeviator dem Spannungsdeviator koaxial ist. Als Proportionallitätsfaktor setzt Hencky einen variablen "Plastizitätsmodul" an. In Tensornotation lautet das Gesetz von Hencky

$$\epsilon'_{ij} = \frac{1}{2G_p}\ \sigma'_{ij} \qquad (15)$$

Durch Superposition mit den elastischen Formänderungen erhält man im Falle der Belastung

$$\varepsilon'_{ij} = \left(\frac{1}{2G_p} + \frac{1}{2G}\right) \sigma'_{ij} \tag{16}$$

Bei Entlastung bleibt der plastische Anteil erhalten, und es gilt wieder das Hookesche Gesetz

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} \tag{17}$$

Die differentielle Beziehung nach Prandtl-Reuss sagt aus, elastische Verzerrungen inbegriffen,

$$d\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_v} d\varepsilon_{vp} \tag{18}$$

Dieses Gesetz erfüllt die Forderung einer sogenannten neutralen Spannungsvariation, die keine plastischen Deformationen nach sich zieht. Hier bedeuten σ_v und ε_{vp} die einachsige Vergleichsspannung und die dazugehörige plastische Vergleichsdehnung. Hencky hat gezeigt, wie die Beziehung (18) integriert werden kann. Unter der Voraussetzung, daß die Hauptspannungsachsen ihre Richtung beibehalten, d.h. der Spannungstensor S ist einem Anfangsspannungstensor S_o koaxial und daß dieses Verhältnis während der Integration konstant ist, bekommt man aus (18)

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_v} \varepsilon_{vp} + \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} \tag{19}$$

(19) und (16) liefert identische Relationen, wenn

$$G_p = \frac{\sigma_v}{3\varepsilon_{vp}} \tag{20}$$

gesetzt wird. Im allgemeinen sind beide Fassungen aber verschieden, denn das Gesetz von Hencky genügt den Anforderungen einer neutralen Spannungsvariation nicht.

Für den Torsionsfall bekommt man

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{1}{G_p} + \frac{1}{G}\right) \tau_{xy} = \frac{G+G_p}{G \cdot G_p} \tau_{xy} \qquad (21)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{1}{G_p} + \frac{1}{G}\right) \tau_{xz} = \frac{G+G_p}{G \cdot G_p} \tau_{xz} \qquad (22)$$

Für G gilt

$$G = \frac{\sigma_v}{3\varepsilon_{ve}} \qquad (23)$$

Somit erhält man nach den Schubspannungen aufgelöst aus (21) und (22)

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_v}{3\varepsilon_v} \gamma_{xy} \qquad (24)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\sigma_v}{3\varepsilon_v} \gamma_{xz} \qquad (25)$$

wenn

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} \qquad (26)$$

ist.

2.2 Kraftgrößenverfahren

Zuerst wird wieder das P.d.v.K. formuliert.

$$\delta \Pi_i^* = \delta \Pi_a^* \qquad (27)$$

Die schon bekannten Beziehungen lauten

$$\delta \Pi_a^* = \delta M_t \cdot \theta$$

$$= -4 \frac{G}{l} \int \delta\Phi \, dF \cdot \theta \qquad (28)$$

$$\delta \Pi_i^* = 1 \cdot \int \left[\tau_{xy} \cdot \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \, \delta\gamma_{xz}\right] dF \qquad (29)$$

Die virtuelle Formänderungsenergie wird mit (21) und (22) umgeformt.

$$\delta \Pi_i^* = 1 \int \left[\left(\frac{G+G_p}{G \cdot G_p}\right) \left(\tau_{xy} \, \delta \tau_{xy} + \tau_{xz} \, \delta \tau_{xz}\right)\right] dF \qquad (30)$$

Einsetzen von (5) und (6) ergibt

$$\delta\Pi_i^* = 1 \cdot \int \left[\left(\frac{G+G_p}{G \cdot G_p}\right) \left(-2\frac{G}{l}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\left(-2\frac{G}{l}\delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right) + 2\frac{G}{l}\frac{\partial\Phi}{\partial y} \cdot 2\frac{G}{l}\delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right)\right] dF$$

Da der spätere Ansatz für die Spannungsfunktion pro Feld linear ist, d.h. die Schubspannungen sind feldweise konstant, kann der Faktor

$$\frac{G+G_p}{G \cdot G_p}$$

vor das Integral gezogen werden.

$$\delta\Pi_i^* = \frac{G+G_p}{G \cdot G_p} \cdot \frac{4G^2}{l} \int \left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\delta\Phi) + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\delta\Phi)\right] dF \qquad (31)$$

Die Relationen (31) und (28) müssen noch in (27) eingesetzt werden. Daraus folgt

$$\frac{G+G_p}{G_p} \int \left[\frac{\partial}{\partial y}(\delta\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(\delta\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right] dF = -\int \delta\Phi \, dF \qquad (32)$$

Die Abhängigkeit der Torsionsfunktion vom Drehwinkel θ ist ohne Bedeutung, denn θ wird als konstanter Parameter betrachtet. Das bedeutet aber, daß die gleichen Ansatzfunktionen und Verläufe benutzt werden können wie im rein elastischen Fall. Damit lautet das LGS pro Einzelfeld in der schon bekannten Schreibweise

$$\mathbf{F} \cdot \underline{\Phi} = -\frac{G_p}{G+G_p} \cdot \underline{f} \qquad (33)$$

2.3 Formänderungsgrößenverfahren

Das P.d.v.V. kommt jetzt zur Anwendung

$$\delta\Pi_i = \delta\Pi_a \qquad (34)$$

Die virtuelle Formänderungsenergie lautet

$$\delta\Pi_i = 1 \cdot \int \left[\tau_{xy}\,\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\,\delta\gamma_{xz}\right] dF \qquad (35)$$

Auf das Gesamtsystem bezogen beträgt die virtuelle äußere Arbeit

$$\delta\Pi_a = M_t \cdot \delta\theta$$

Diese tritt nicht in Erscheinung, da der Drehwinkel nicht variiert zu werden braucht. Für ein Einzelfeld tritt jedoch noch eine äußere Arbeit auf, die auf die am Rand des Elements angreifenden Kräfte zurückzuführen ist.

$$\delta\Pi_a^{(e)} = RT^{(e)} \tag{36}$$

Werden die Einzelfelder zum Gesamtsystem zusammengefaßt, so heben sich die Randterme gegenseitig auf. Das ist der Grund, warum sie im elastischen Fall nicht hingeschrieben wurden.

Die virtuelle Formänderungsenergie wird mit (20) und (21) umgeformt.

$$\delta\Pi_i = 1 \cdot \int \left[\left(\frac{G \cdot G_p}{G+G_p}\right)\left(\gamma_{xy} \cdot \delta\gamma_{xy} + \gamma_{xz}\,\delta\gamma_{xz}\right)\right] dF$$

Einsetzen von (8) und (9) ergibt

$$\delta\Pi_i = \frac{G \cdot G_p}{G+G_p} \int \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} - \theta z\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \theta y\right)\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right] dF \tag{37}$$

Mit der Abkürzung

$$\bar{G} = \frac{G \cdot G_p}{G+G_p} = \frac{\sigma_v}{3\varepsilon_v}$$

und einsetzen von (37) und (36) in (34) folgt

$$\bar{G}\int\left[\frac{\partial}{\partial y}(\delta\phi)\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}(\delta\phi)\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]dF=\bar{G}\int\left[\frac{\partial}{\partial y}(\delta\phi)z-\frac{\partial}{\partial z}(\delta\phi)y\right]dF\cdot\theta+RT^{(e)} \tag{38}$$

$\bar{G}$ konnte vor das Integral gezogen werden, da der lineare Ansatz für die Verwölbungsfunktion nur feldweise konstante Schubspannungen liefert.

Setzt man außerdem

$$\phi(y,z,\theta) = \theta \cdot \phi_1(y,z)$$

so folgt mit den Abkürzungen von Kapitel 2

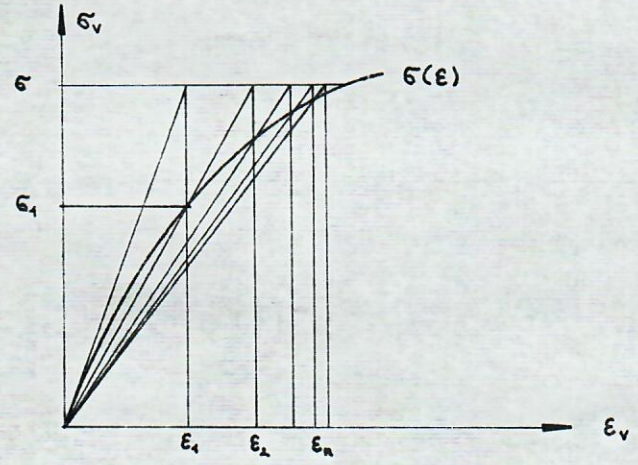
$$\bar{G} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \underline{\phi} = \bar{G} \cdot \underline{s} + RT^{(e)} \tag{39}$$

(39) darf nicht durch $\overline{G}$ dividiert werden, da sich anderenfalls die Randterme im Gesamtsystem nicht kompensieren, weil $\overline{G}$ pro Einzelfeld zwar konstant aber sicherlich nicht für alle Einzelfelder gleich zu sein braucht.

3. Iterationsverfahren

Der Schritt vom Einzelsystem zum Gesamtsystem wird in der gleichen Art vollzogen wie das in Kapitel 2 der Fall war. Das gilt für beide Verfahren. Wie im Fall plastischer Verformung vorgegangen wird, soll an einem Iterationsverfahren beschrieben werden, das im Zienkiewicz [3] und im Holand-Bell [7] geschildert wird. Voraussetzung zur Konvergenz ist, daß die Steigung der Tangente positiv ist und monoton abnimmt. Je kleiner der Anstieg ist, desto geringer wird die Konvergenzgeschwindigkeit, die ganz aufhört, wenn die Tangente horizontal verläuft.

Bild 8:



In Zienkiewicz findet man folgende Darstellung:
Im 1. Schritt wird die ganze Belastung aufgebracht und bei der Lösung des Gesamtsystems linear-elastische Verhältnisse zwischen Spannungen und Deformationen zu Grunde gelegt. Im 2. Schritt werden für die einzelnen Elemente neue Elastizitätsmoduli bestimmt in Abhängigkeit von den erreichten Spannungen bzw. Verzerrungen des 1. Schrittes.
Die Folge der Elastizitätsmoduli sieht folgendermaßen aus, wenn σ die volle äußere Belastung ist.

1. Schritt: $\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{G}$

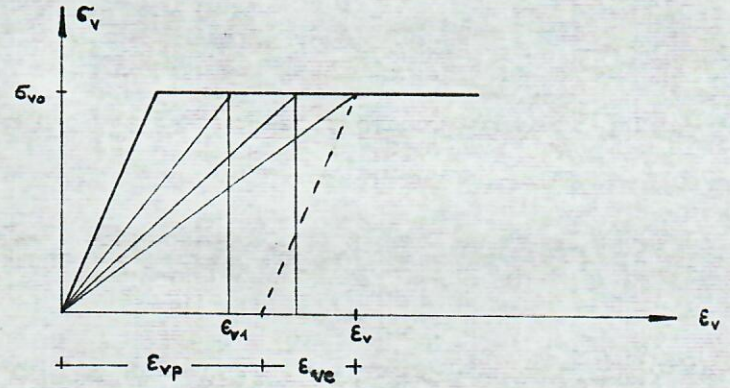
An Hand der meist experimentell ermittelten Kurve läßt sich σ_1 ablesen. Der neue Modul G_1 wird gebildet durch

$$G_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} ,$$

den die Elemente erhalten, deren Verzerrungen schon im plastischen Bereich liegen. Jetzt wird das LGS des Gesamtsystems noch einmal gelöst. Dann wird der 2. Schritt wiederholt, usw. Laut Zienkiewicz konvergiert diese Methode bei den meisten praktischen Problemen.

Um sich im 1. Schritt nicht zu weit von der Kurve $\sigma(\varepsilon)$ zu entfernen, bringt Holand-Bell nur einen Bruchteil der äußeren Last auf. Dieser Anteil wird dann mit jedem Iterationsschritt erhöht, bis die ursprüngliche Belastung erreicht worden ist. (*)

Bild 9:



Liegt ideal-platisches Werkstoffverhalten vor, so lassen sich die in Frage kommenden Parameter leicht finden. Beim Kraftgrößenverfahren gilt

$$G_p = \frac{\sigma_{vo}}{3\varepsilon_{vp}}$$

σ_{vo} repräsentiert die Fließspannung, ε_{vp} die plastische Vergleichsdehnung.

Beim Formänderungsgrößenverfahren wird $\overline{G}$ benötigt. Es gilt

$$\overline{G} = \frac{\sigma_{vo}}{3\varepsilon_v}$$

Mit Hilfe des Elastizitätsmoduls

$$G = \frac{\sigma_{vo}}{3\varepsilon_{ve}}$$

läßt sich $\overline{G}$ umformen in

$$\overline{G} = G \cdot \frac{\varepsilon_{ve}}{\varepsilon_v}$$

(*)

Damit soll vermieden werden, daß nach dem 1. Iterationsschritt einzelne Elemente in den Bereich plastischer Verformung geraten, während sie in Wirklichkeit nur elastisch beansprucht werden. Welche Methode besser konvergiert wird in Holand-Bell nicht erwähnt.

Literaturverzeichnis:

[1] Giencke,E./Knothe,K. Scripte zum Seminar "Finite Methoden zur Konstruktionsberechnung" WS 70/71

[2] Szabó, J.: Höhere Technische Mechanik, Springer 1964

[3] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, Mc Graw-Hill 1967

[4] Filonenko-Boroditsch: Elastizitätstheorie, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1967

[5] Reckling, K.-A.: Plastizitätstheorie, Springer 1967

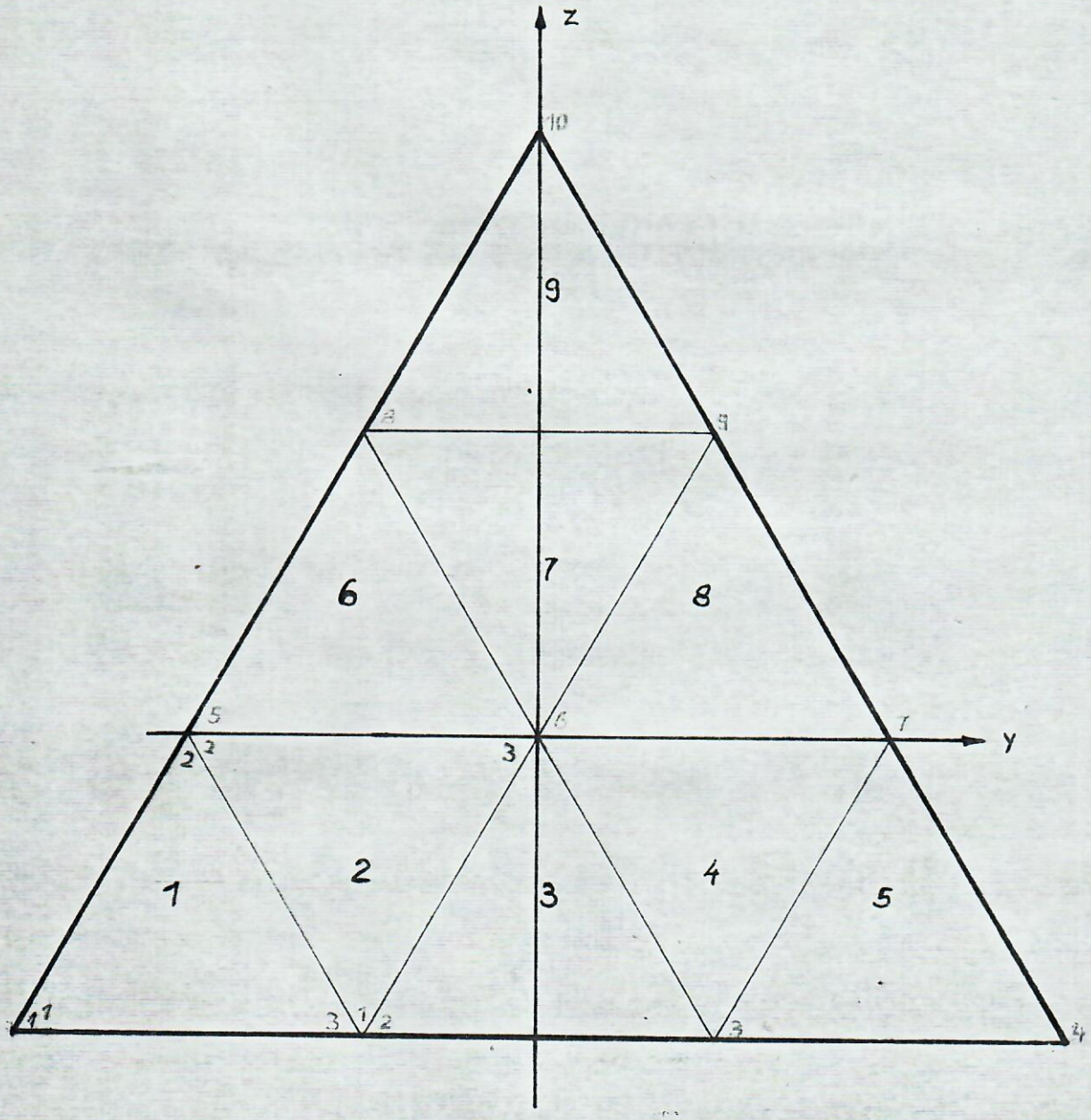
[6] Prager, W. und Hodge, P.G.: Theorie ideal plastischer Körper, Springer 1954

[7] Holand and Bell: Finite Element Methods, Tapir Forlag, 1970

Beispiel: Gleichseitiges Dreieck

M = 9

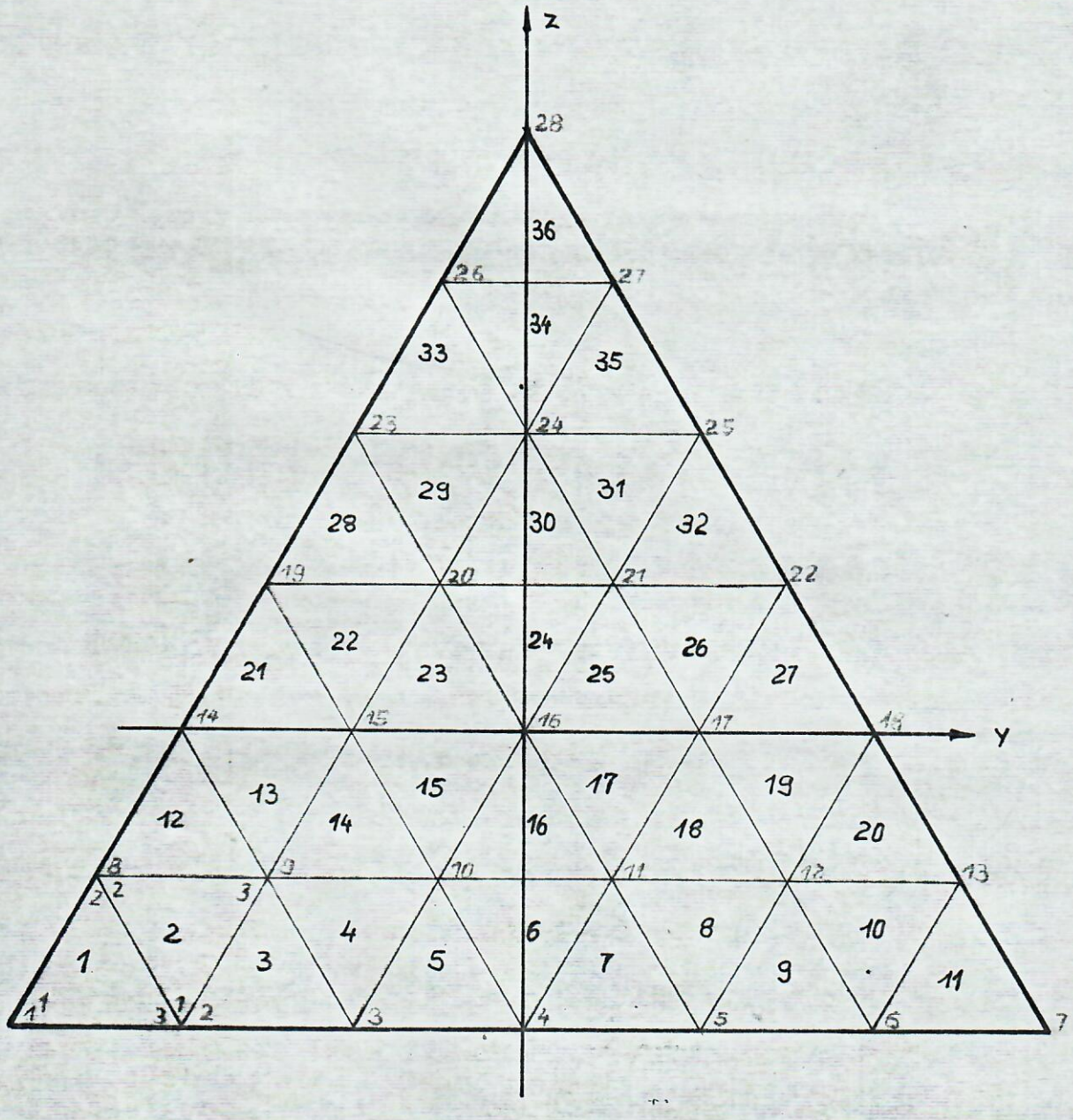
N = 10



Beispiel: Gleichseitiges Dreieck

M = 36

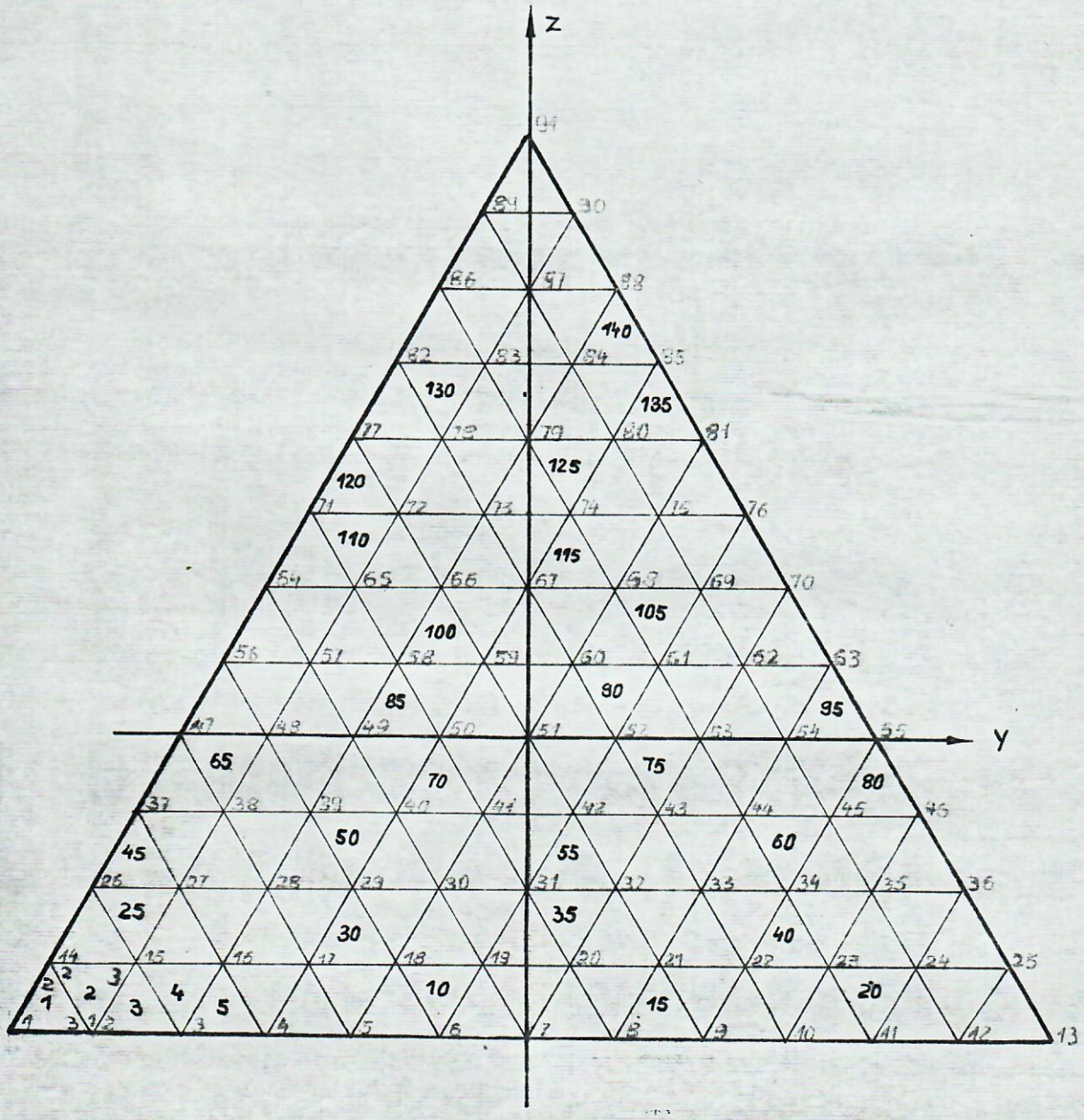
N = 28



Beispiel: Gleichseitiges Dreieck

M = 144

N = 91



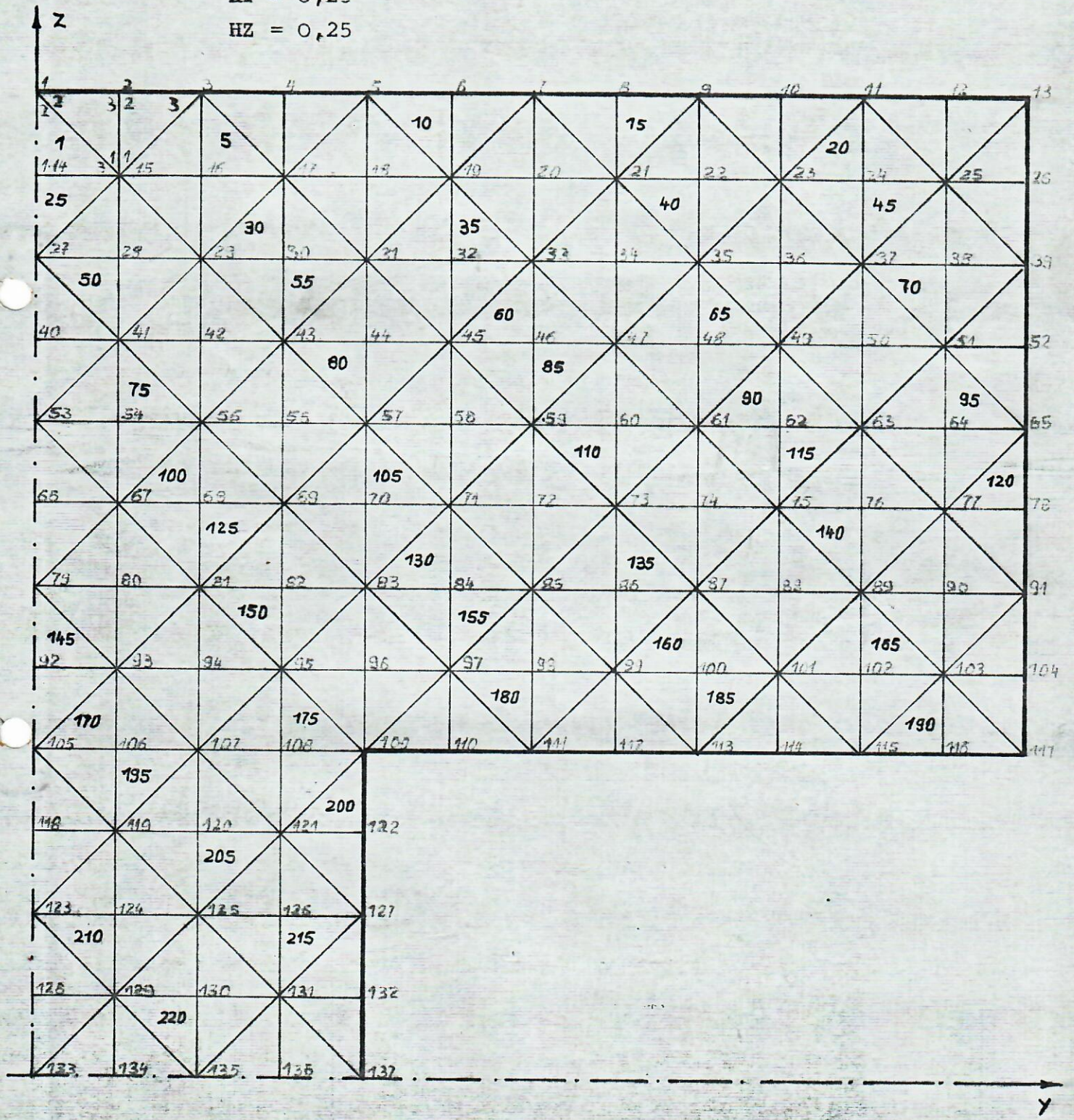
Beispiel: I - Querschnitt

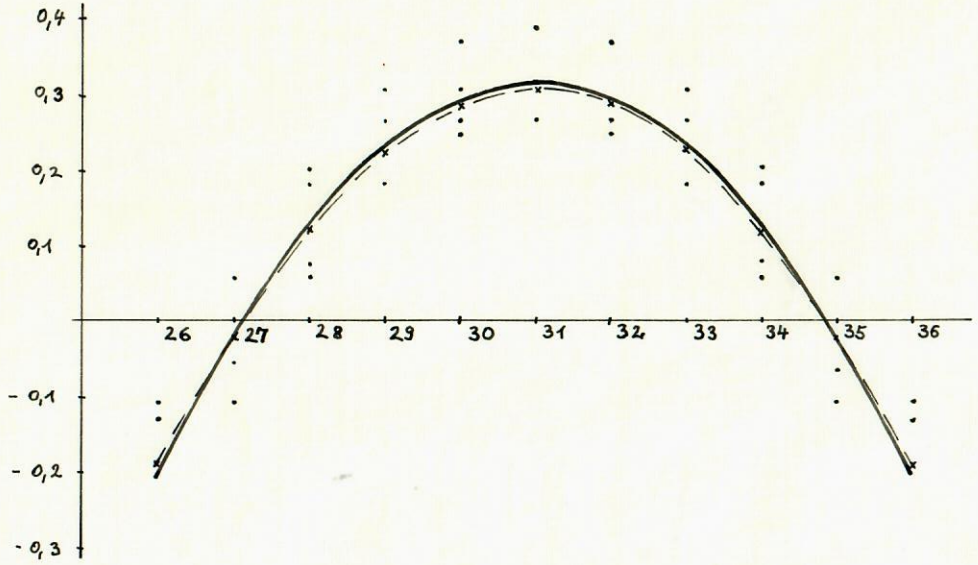
M = 224

N = 137

HY = 0,25

HZ = 0,25




0,4
0,3
0,2
0,1
- 0,1
- 0,2
- 0,3
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36

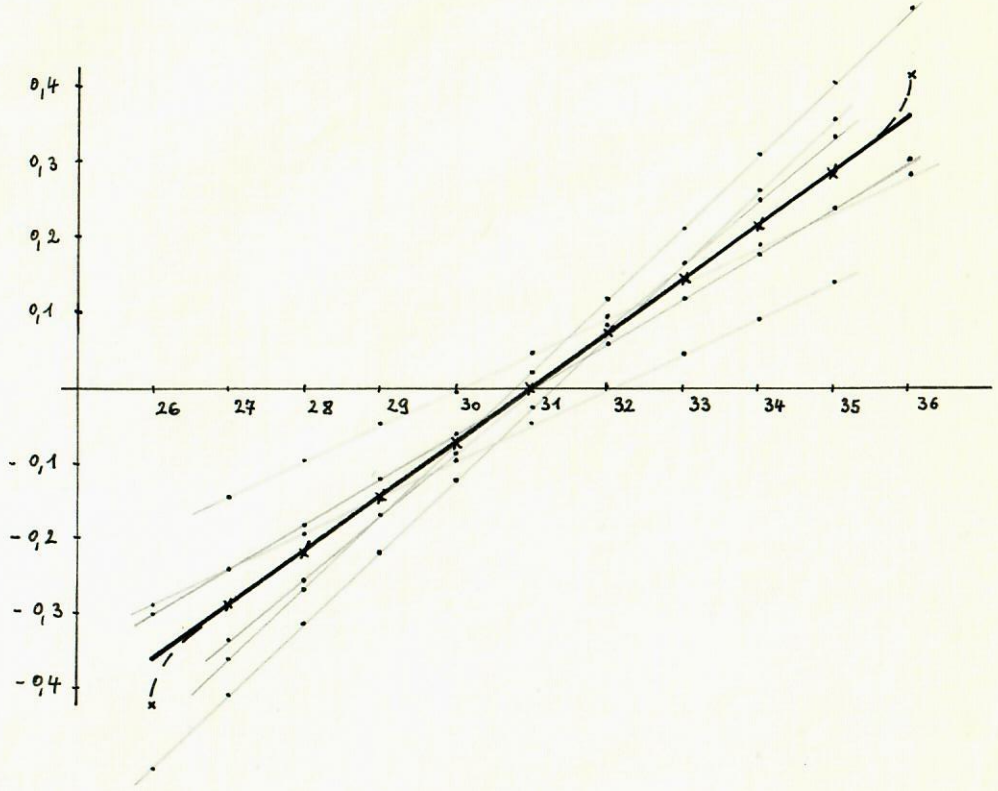

0,4
0,3
0,2
0,1
- 0,1
- 0,2
- 0,3
- 0,4
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36

Bild 11:

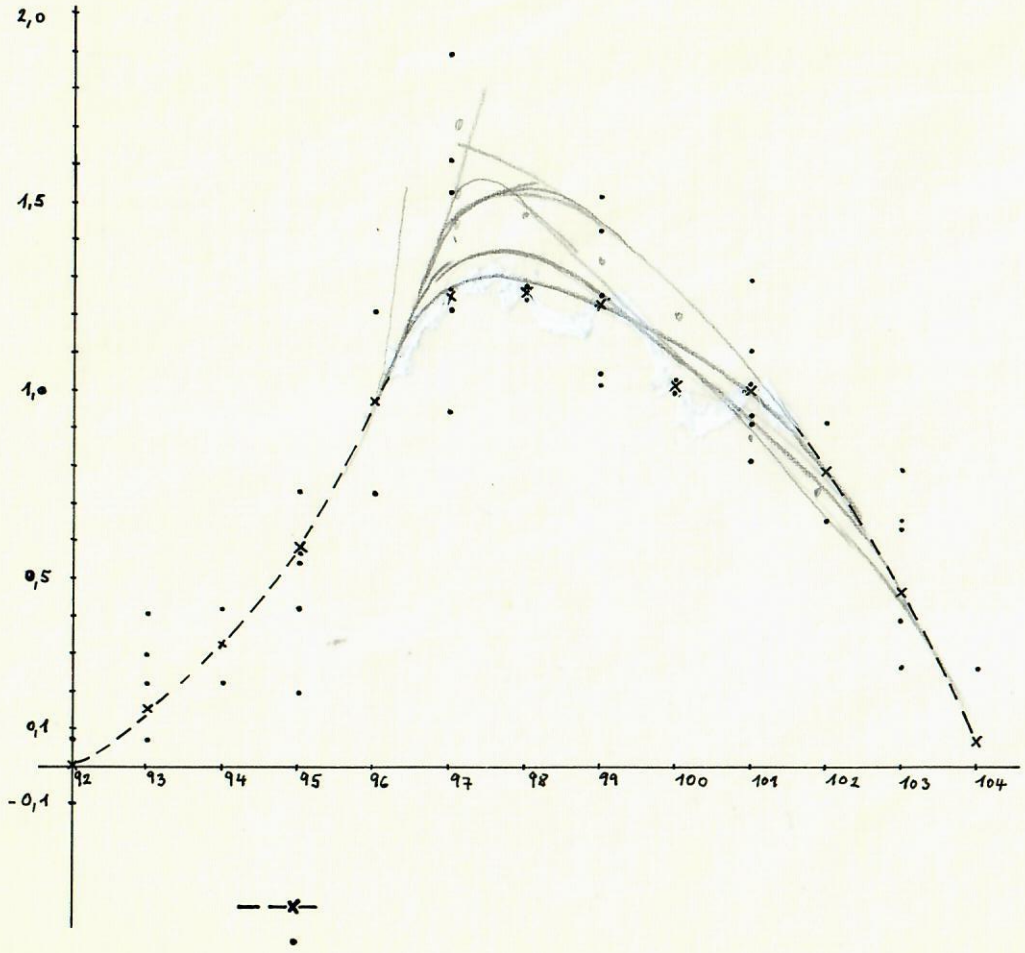
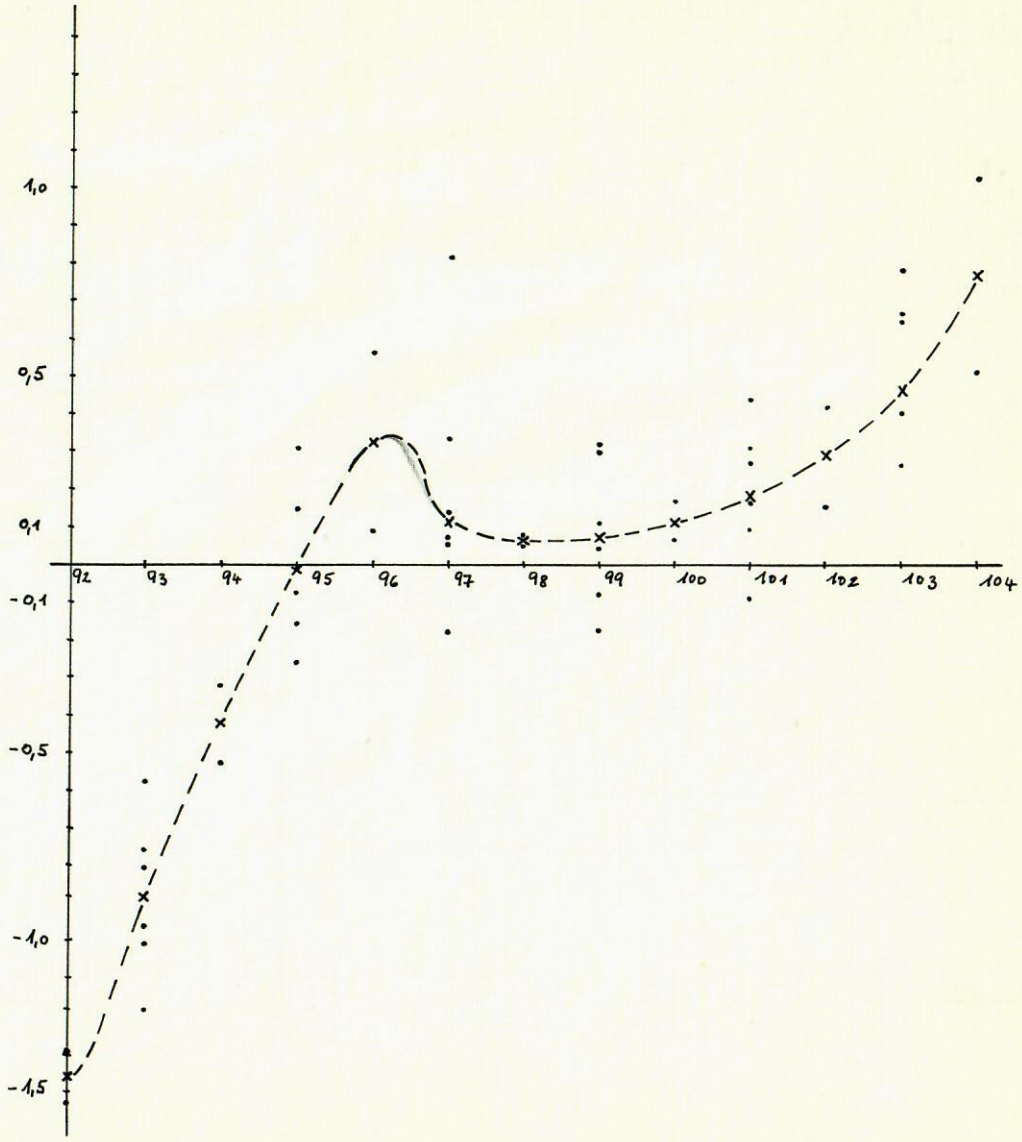



Bild 12: