Untersuchungen über numerische Verfahren für elastisch, poröse Medien

Vom Fachbereich 9
Physikalische Ingenieurwissenschaft
der Technischen Universität Berlin
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte Dissertation

von

Gerhard Krause

Berichter: Prof. Dipl.-Ing. Wolfgang Zander
Prof. Dr.-Ing. Klaus Knothe
Tag der mündlichen Prüfung: 19. 12. 1975

Berlin 1975
D 83

Inhaltsübersicht: Seite

I. Kapitel
Einführende Betrachungen

II. Kapitel
Numerische Verfahren der eindimensionalen Konsolidation (Wärmeleitung)

1. Einleitung

2. Grundgleichungen
2.1 Differentialgleichung von Terzaghi
2.2 Differenzengleichung
2.3 Methode der Finiten Elemente
2.3.1 Variationsprinzip
2.3.2 Ansatzfunktionen
2.3.3 Gesamtsystem
2.4 Analoge Differenzenformeln für FEM

3. Möglichkeiten zur Bewältigung der Zeititeration
3.1 Aufstellen eines linearen Gleichungssystems
3.2 Übertragungsmatrizen
3.3 Abschätzung des Rechenaufwandes

4. Experimentell numerische Fehleruntersuchungen
4.1 Sinusprofil
4.2 Rechteckprofil

5. Modifikation für geschichtete Medien
5.1 Korrekturformel
5.2 Beispiele

6. Zusammenfassung

7. Bezeichnungen

8. Literatur

III. Kapitel
Mechanik der Gemische
- mit Bezug auf gesättigte, poröse Medien -

1. Einleitung

2. Kurzer Abriss der historischen Entwicklung

Seite

3. Mechanik der Gemische
3.1 Bewegungs- und Kontinuitätsgleichungen nach GREEN und NAGHDI
3.1.1 Definitionen
3.1.2 Energiebilanz (erster Hauptsatz)
3.1.3 Entropiebilanz (zweiter Hauptsatz)
3.2 Theorien für gesättigte, elastisch, poröse Medien
3.2.1 Voraussetzungen für ein Gemisch fest-flüssig
3.2.2 Bewegungsgleichungen
3.2.3 Kontinuitätsgleichungen
3.2.4 Stoffgleichungen nach GREEN u.a.
3.2.5 Konsolidationstheorien
3.2.5.1 Modellvorstellungen
3.2.5.2 Voraussetzungen
3.2.5.3 Gleichgewichtsbeziehungen
3.2.5.4 Kontinuitätsgleichungen
3.2.5.5 Abhängigkeit des relativen Porenvolumens von der Volumendilatation
3.2.6 Materialgesetze
3.2.6.1 Darcysches Filtergesetz
3.2.6.2 Deutung der Stoffbeiwerte für Festkörper und Flüssigkeit
3.2.7 Formulierung der Rand-Anfangsbedingungen
3.2.8 Vergleich und Kritik der Konsolidationstheorien
4. Zusammenfassung
5. Bezeichnungen
6. Literatur

IV. Kapitel
Prinzipe der virtuellen Arbeiten für Gemische

1. Vorbemerkungen
2. Prinzipe der virtuellen Arbeiten für Gemische
2.1 Grundgleichungen
2.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen
2.3 Prinzip der virtuellen Kräfte

Seite

3. Variationsprinzip für elastisch, poröse Medien nach SANDHU
3.1 Grundgleichungen
3.2 Variationsprinzip von SANDHU
4. Zusammenfassung und Vergleich
5. Bezeichnungen
6. Literatur

V. Kapitel
Numerische Verfahren für elastisch, poröse Körper

1. Einleitung
2. Finite Gleichungen für elastisch, poröse Medien
2.1 Grundgleichungen
2.2 Matrizenschreibweise
2.3 Aufbau der finiten Gleichungssysteme
3. Lösungsmethoden
3.1 Gesamtsystem nach SANDHU
3.2 Verschiebungsmethode
3.3 Druckmethode
3.4 Vergleich der Verfahren
3.5 Diskussion der Anfangsbedingungen
4. Numerische Ergebnisse
4.1 Ebener Verzerrungsfall
5. Zusammenfassung
6. Beziehungen
7. Literatur

VI. Kapitel
Zukünftige Entwicklungsmöglichkeiten

I. Kapitel:
Einführende Betrachtungen

Mit der Entwicklung der Methode der Finiten Elemente (FEM) sind zahlreiche Aufgaben der Statik und angewandten Mechanik erfolgreich gelöst worden. Dies betrifft zum großen Teil Randwertprobleme. Im Folgenden soll an einem Beispiel untersucht werden, ob diese bewährte Methode auch auf Rand-Anfangswertprobleme ausgedehnt werden kann.

Der hier zu erörternde Fall ist im Grundbau von großer praktischer Bedeutung und betrifft hauptsächlich Konsolidationsvorgänge in der Bodenmechanik aber auch Grundwasserströmungen. Die Theorien über Konsolidation sind an verschiedenen Modellvorstellungen hergeleitet worden. Für die daraus resultierenden Differentialgleichungen konnten bisher keine allgemeinen Lösungswege gezeigt werden, so daß Näherungsverfahren auf diesem Gebiet von besonderem Interesse sind.

Die vorliegende Arbeit ruht im wesentlichen auf drei Stützen. Erstens muß die Problemstellung im Sinne der Mechanik erfaßt werden. Dazu hat es sich als vorteilhaft erwiesen, sich neben den speziellen Theorien über elastisch, poröse Körper auch noch der Theorie der Gemische zu bedienen. Zweitens muß ein numerisches Verfahren ausgewählt werden, das sich für das physikalische Problem entsprechend aufbereiten läßt. Der dritte Eckpfeiler stellt die praktische Realisierung mit Hilfe eines Computers dar. Bei der programmtechnischen Gestaltung treten vielfache Hindernisse auf, deren mühsame und zeitraubende Überwindung die eigentliche Aufgabe fast vergessen läßt. Die in den nächsten Kapiteln vorgezeigten numerischen Resultate haben bei vorsichtiger Schätzung mehr als zwei Drittel der gesamten Arbeitszeit in Anspruch genommen. Auf die Programmierung und den Aufbau des Programms soll jedoch nicht weiter eingegangen werden. Es wird unterstellt, daß die entwickelten numerischen Verfahren in programmtechnischer Hinsicht logisch und effektiv abgefaßt worden sind. Es verbleibt, die numerischen Ergebnisse zu diskutieren.

Um zwischen physikalischen und numerischen Effekten besser unterscheiden zu können und das Verhalten der Numerik kennen zu lernen, wurden Betrachtungen über den eindimensionalen Fall angestellt, die im II. Kapitel niedergelegt sind. Im anschließenden III. Kapitel über Mechanik der Gemische sind die konventionellen Theorien über Konsolidation aus dem allgemeinen Überblick der Theorie der Gemische abgeleitet. Nach Erarbeitung der das physikalische Phänomen charakterisierenden Grundgleichungen werden im IV. Kapitel ähnlich wie in der Elastostatik Prinzipe der virtuellen Arbeiten aufgestellt. Dies erfolgt im Hinblick darauf, daß die Methode der Finiten Elemente als Ritzsches Verfahren mit lokalisierten Ansätzen interpretiert wird. Wie in diesem Rahmen finite Formulierungen für elastisch, poröse Körper angegeben werden können, darüber gibt das V. Kapitel Auskunft.

II. Kapitel:

Numerische Verfahren für eindimensionale Konsolidation (Wärmeleitung)

1. Einleitung

Von einer Untersuchung, wie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit finiten Verfahren numerisch gelöst wird, können prinzipiell keine neuen Erkenntnisse erwartet werden. Dazu wird dieses Problem schon ausführlich in der einschlägigen Literatur behandelt. Wer numerisch rechnet, wird die Erfahrung gewonnen haben, daß sich in den erzeugten Ergebnissen nicht nur die dem Problem zugrundeliegenden physikalischen Aussagen wiederspiegeln, sondern auch unerwünschte numerische Effekte, die aus dem gewählten Verfahren herrühren. Liegt möglicherweise keine analytische Lösung zum Vergleich vor, kann es außerordentlich schwierig sein zwischen physikalischen und numerischen "Besonderheiten" zu trennen. Die in diesem Kapitel dargestellten numerischen Einzelheiten sind in der Literatur noch nicht veröffentlicht worden. Ergänzend dazu wird versucht, aus diesem eindimensionalen Beispiel praktische Verhaltensweisen für die Zeititeration zu gewinnen, die auch auf mehrdimensionale parabolische Differentialgleichungen übertragbar sind.

Der Anstoß, neben den Differenzenverfahren (FD) auch die Methode der Finiten Elemente (FEM) für instationäre Probleme heranzuziehen, erfolgte in einer Arbeit von Gurtin |1|, in der u.a. ein Variationsprinzip für die Wärmeleitungsgleichung angegeben wurde. Dieses Funktional verwendend behandelten Wilson u. Nickell |2| Beispiele für Wärmeleitung mit FEM. Diese Arbeiten genügten Desai u. Johnson |3|, |4| in zwei weiteren Veröffentlichungen Probleme der eindimensionalen Konsolidation darzustellen. Hier wird versucht, das Fehlerverhalten z.B. in Abhängigkeit der Schrittweite Δt für FEM numerisch zu ergründen. Dieses Unterfangen ist nur teilweise geglückt, denn aus ihren zahlreichen Darstellungen gelingt es nicht, eine optimale Strategie für die Zeititeration und somit auch für die Wahl von Δt abzuleiten. Darüber hinaus wenden sie die Methode auf geschichtete Probleme an, indem schichtweise verschiedene Materialwerte eingesetzt werden. Wie theoretische Überlegungen zeigen, ist dieser Lösungsweg unvollständig. Die gute Übereinstimmung zwischen numerischen, analytischen bzw. experimentellen Ergebnissen, die Desai u.a. in ihren Arbeiten |3| und |4| erzielt haben, täuscht über die spezielle Auswahl ihrer Beispiele hinweg.

In den folgenden Abschnitten wird ein ständiger Vergleich zwischen FD und FEM angestrebt. Im übrigen hättendie Ausdrücke nach FEM für das lineare Element auch ohne Variationsprinzip direkt aus der Differentialgleichung gefunden werden können. Nach einigen Überlegungen über die Zeititeration, woraus der Rechenaufwand ermittelt wird, wird mit numerischen Mitteln versucht, das Fehlerverhalten für FD und FEM zu ergründen. Ein Aspekt liegt in der Abänderung der Anfangsbedingungen. Zum Schluß wird eine Korrekturformel für geschichtete Medien vorgeschlagen.

2. Zusammenstellung der Grundgleichungen

2.1 Differentialgleichung von Terzaghi

Die von Terzaghi abgeleitete Differentialgleichung des Porenwasserüberdrucks in gesättigten, bindigen Böden hat die Gestalt |11|

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \qquad (1)$$

mit der Anfangsbedingung

$$p(z,o) = p_o(z) \qquad (2)$$

und den Randbedingungen (Bild 1)

$$p(o,t) = p^*(t) \qquad (3a)$$

und

$$p(\ell,t) = p^*(t) \qquad (3b)$$

Hier wurde der Verdichtungsbeiwert

$$c_v = k_o \bar{E}_s/\gamma$$

mit der Steifeziffer

$$\bar{E}_s = E_o n_o/(1-n_o)$$

eingeführt. (Für die Bedeutung der Größen E_o, k_o, n_o, usw. siehe 7. Abschnitt)

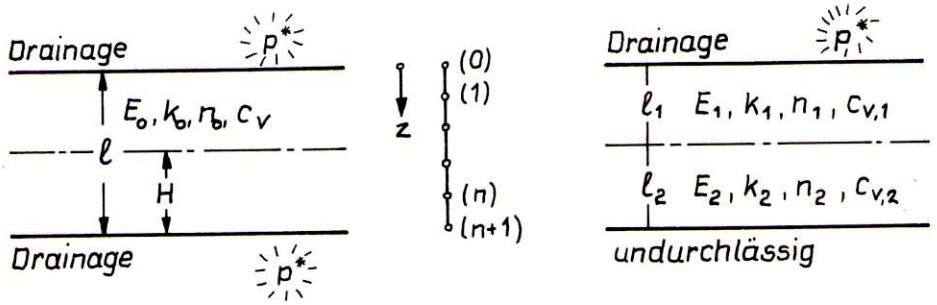

Bild 1: Beispiele für eindimensionale Konsolidation

2.2 Differenzengleichung

Wird für die zweite Ableitung in (1) die zentrale Differenzenformel bezüglich des Knotens i herangezogen, so erscheint (1) in der Form

$$\dot{p}_{i,j} - \frac{c_v}{h^2}\left[p_{i-1,j} - 2\,p_{i,j} + p_{i+1,j}\right] = 0 \qquad (4)$$

Bei Auflistung aller Feldgleichungen erhält man für das Gesamtsystem

$$\underline{E}\,\dot{\underline{p}} - \frac{c_v}{h^2}\,\underline{T}_o\,\underline{p} = \underline{\Theta} \quad , \qquad (5)$$

wobei $\underline{E}$ die Einheitsmatrix, $\underline{T}_o$ die Matrix, die den Differenzenstern gemäß Gl. (4) enthält und $\underline{\Theta}$ den Nullvektor bedeuten. Der Vektor $\underline{p}$ enthält die noch unbekannten Drücke p_i in den Knotenpunkten $z_i (i=1, \ldots, n)$ zum Zeitpunkt t_j. Die Randbedingungen (3) sind in dem System (5) berücksichtigt, wobei die Druckwerte auf dem Rand zu Null angenommen werden.

2.3 Methode der Finiten Elemente

2.3.1 Variationsprinzip

Wie die DGL (1) mit der Methode der Finiten Elemente verknüpft wird, ist in |2| und |3| gezeigt worden. Das notwendige Variationsprinzip hat Gurtin |1| gefunden.

Die wichtigsten Schritte sollen noch einmal wiederholt werden. Die Integration von (1) unter Berücksichtigung der A.B. (2) liefert

$$c_v \int_o^t \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\,dt = p(z,t) - p_o(z) \qquad (6)$$

Das zu dieser Integralgleichung äquivalente Funktional hat unter Berücksichtigung der R.B. (3) die Form |1|, |3|

$$F[p] = \int_o^{\ell}\int_o^t \Big[p(z,t-\tau)p(z,\tau) + c_v \frac{\partial}{\partial z}p(z,t-\tau)\int_o^{\tau}\frac{\partial}{\partial z}p(z,\sigma)\,d\sigma - 2\,p_o(z)p(z,t-\tau)\Big]d\tau dz \qquad (7)$$

Für den Verlauf von $p(z,t)$ innerhalb eines Elementes gilt der Produktansatz

$$p(z,t) = \underline{V}(z)\ \underline{p}^e(t) \tag{8}$$

Die Matrix $\underline{V}(z)$ enthält die lokalen Ansatzfunktionen und der Vektor $\underline{p}^e(t)$ die vereinbarten Unbekannten in den Knotenpunkten. Formales Einsetzen von Gl. (8) in Gl. (7) ergibt pro Element
- mit $\underline{V}_z(z) = \frac{\partial}{\partial z}\underline{V}(z)$ -

$$F^e[p] = \int_0^t \underline{p}^{e^t}(t-\tau) \int_0^{h^e} [\underline{V}^t(z)\underline{V}(z)\underline{p}^e(\tau) + c_v^e \int_0^\tau \underline{V}_z^t(z)\ \underline{V}_z(z)p^e(\sigma)d\sigma$$

$$- 2\ \underline{V}^t(z)\ \underline{V}(z)\ \underline{p}_o^e]\ \ dz\ d\tau \tag{9}$$

Folgende Matrizen werden definiert

$$\underline{B}^e = \int_0^{h^e} \underline{V}^t(z)\ \underline{V}(z)dz \tag{10}$$

und

$$\underline{C}^e = c_v^e \int_0^{h^e} \underline{V}_z^t(z)\ \underline{V}_z(z)dz \tag{11}$$

Die Systemmatrizen, die sich aus der Summation der Elementmatrizen ergeben, werden mit $\underline{B}$ und $\underline{C}$ bezeichnet. Entsprechendes gilt für die Vektoren $\underline{p}$ und $\underline{p}_o$ des Gesamtsystems. Mit der Abkürzung

$$\underline{r} = \underline{B}\ \underline{p}_o \tag{12}$$

folgt aus Gl. (9) für das Gesamtsystem

$$F[p] = \int_0^t \underline{p}^t(t-\tau)\ [\underline{B}\ \underline{p}(\tau) + \int_0^\tau \underline{C}\ \underline{p}(\sigma)\ d\sigma - 2\underline{r}]d\tau \tag{13}$$

Bildung der 1. Variation liefert als Resultat die zu (6) analoge finite Beziehung

$$\underline{B}\ \underline{p}(t) + \int_0^t \underline{C}\ \underline{p}(\tau)d\tau = \underline{r} \tag{14}$$

2.3.2 Ansatzfunktionen

Die Methode der Finiten Elemente soll hier als Ritzsches Verfahren mit örtlich begrenzten Ansatzfunktionen verstanden werden. Somit gelten auch die Kriterien des Ritzschen Verfahren bezüglich dieser Ansatzfunktionen, d.h. gemäß Gl. (6) genügt es, einen linearen Funktionsverlauf in Gl. (8) einzusetzen. Die Elementmatrizen (10) und (11) erhalten folgendes Aussehen |3|

$$\underline{B}^{e}_{lin} = \frac{h^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{15a}$$

und

$$\underline{C}^{e}_{lin} = \frac{c_v{}^e}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{15b}$$

Der Druckverlauf in geschichteten Medien (Bild 1) ist auf Grund der Kontinuitätsgleichung an der Schichtgrenze z_i nicht stetig differenzierbar.

$$k_i \frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{z=-z_i} = k_{i+1} \frac{\partial p}{\partial z}\bigg|_{z=+z_i} \tag{16}$$

Dieser Umstand legt zunächst die Vermutung nahe, daß Elemente, die als Unbekannte sowohl den Druck als auch den Druckgradienten verwenden, für Schichtprobleme besser geeignet sein könnten. Die zugehörigen Elementmatrizen (10) haben die Gestalt |3|

$$\underline{B}^{e}_{kub} = \frac{h^e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h^e & 54 & -13h^e \\ & 4h^{e\,2} & 13h^e & -3h^{e\,2} \\ & & 156 & -22h^e \\ & & & 4h^{e\,2} \end{bmatrix} \tag{17a}$$

und

$$\underline{C}^{e}_{kub} = \frac{c_v{}^e}{30h^e} \begin{bmatrix} 36 & 3h^e & -36 & 3h^e \\ & 4h^{e\,2} & -3h^e & -h^{e\,2} \\ & & 36 & -3h^e \\ & & & 4h^{e\,2} \end{bmatrix} \tag{17b}$$

2.3.3 Gesamtsystem

Mit Kenntnis der Matrizen (15) bzw. (17) läßt sich das Gesamtsystem aufstellen. Für das lineare Element (15) entsteht unter Berücksichtigung der R.B. (3) und für den Fall $h^e=h$ und $c_v{}^e=c_v$ das Gesamtsystem

$$\frac{h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} - \frac{c_v}{h}\int_{\bullet}^{t}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} dt = \underline{r} + \left(\frac{c_v}{h}\cdot t - \frac{h}{6}\right)\begin{bmatrix} p^* \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ p^* \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Differentation nach t ermöglicht den direkten Vergleich mit (5) - $p^* = o$ -

$$h\ \underline{T}_1\ \dot{\underline{p}} - \frac{c_v}{h}\ \underline{T}_o\ \underline{p} = \underline{\Theta} \qquad (19)$$

Die Matrix $\underline{T}_1$ beinhaltet ein gewichtetes arithmetisches Mittel in der i-ten Zeile bezüglich $\frac{\partial}{\partial t}(p_i)$, während die Matrix $\underline{T}_o$ die zweite partielle Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(p_i)$ repräsentiert. Analoge Überlegungen gelten für das kubische Element (17).

2.4 Analoge Differenzenformeln für FEM

Der übliche Weg, wie im Abschnitt 2.2 gezeigt, führt nach direktem Einsetzen von Differenzenformeln in die Differentialgleichung zur Aufstellung entsprechender finiter Systeme. Als Alternative hierzu wird Gl. (1) erst integriert und dann werden numerische Näherungsverfahren verwendet.

Der eindimensionale Bereich wird in n Elemente eingeteilt. Jeweils zwei benachbarte Elemente werden zusammengefaßt, so daß zwei neue Unterteilungen entstehen (Gitter 1 und Gitter 2), wie aus Bild 2 zu entnehmen ist.

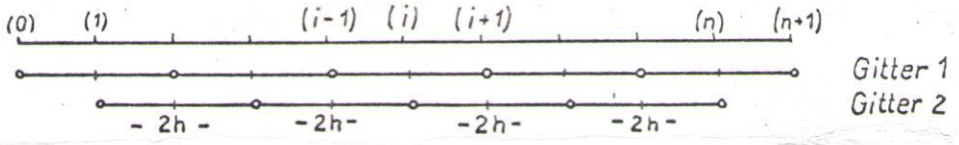

Bild 2: Aufbau verschieden geordneter Gitterlinien

Die Integration in Ortsrichtung über zwei benachbarte Elemente ergibt

$$\int_o^{2h} \dot{p}\ dz = c_v \int_o^{2h} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\ dz \qquad (20)$$

Das Integral auf der linken Seite wird mit der Simpsonschen Regel - auch Keplersche Faßregel genannt - ausgewertet

$$\int_0^{2h} \dot{p}\, dz = \frac{2h}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{i-1} \\ \dot{p}_i \\ \dot{p}_{i+1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Auf die rechte Seite wird zuerst der Mittelwertsatz der Integralrechnung bezüglich des Punktes (i) angewandt, um dann im zweiten Schritt für $\frac{\partial^2 p}{\partial z_i^2}$ den Differenzenstern der Gl. (4) einzusetzen.

Für den Punkt z_i resultiert aus diesen Überlegungen der "Stern"

$$\frac{h}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{i-1} \\ \dot{p}_i \\ \dot{p}_{i+1} \end{bmatrix} - \frac{c_v}{h} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \end{bmatrix} = 0 \tag{22}$$

Da pro Gitter mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden sind, entsteht das Gesamtsystem durch Überlagerung der Gitter eins und zwei. Addition aller Gleichungen liefert das schon bekannte System (18). Es gilt zu beachten, daß aus den R.B.(3) für p^*=const. noch die zusätzliche Beziehung

$$\dot{p}_o = \dot{p}_{n+1} = o \tag{23}$$

verwendet werden muß.

3. Möglichkeiten zur Bewältigung der Zeititeration

Für die praktische Rechnung ist die Wahl einer geeigneten Zeititeration insbesondere bezüglich des Rechenaufwandes von großer Bedeutung. Zwei Formulierungswege können verfolgt werden. Entweder wie in |2|, |3|, |4|, |5|, |6|, usw. wird pro Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem teilweise neu aufgestellt und gelöst, oder man bevorzugt die Handhabung vermöge einer Übertragungsmatrix. Beide Darstellungen sind ineinander überführbar.

3.1 Aufstellen eines linearen Gleichungssystems

Ein ausführliches Beispiel hierfür ist in |2| zu finden. Zunächst wird zur Lösung von (18) das dortige Integral durch Mittelwertbildung ersetzt

$$\int_t^{t+\Delta t} \underline{T}_o\, \underline{p}\, dt = \underline{T}_o \frac{\Delta t}{2} \left[\underline{p}_{t+\Delta t} + \underline{p}_t \right] \tag{24}$$

Einsetzen in (18), d.h. mit $\underline{r} = \underline{T}_1\ \underline{p}_t = \underline{T}_1\ \underline{p}_j$, ergibt das LGS - mit $s = c_v \Delta t/h^2$ -

$$(2\underline{T}_1 - s\ \underline{T}_o)\ \underline{p}_{j+1} = (2\underline{T}_1 + s\ \underline{T}_o)\ \underline{p}_j \tag{25}$$

Falls

$$\underline{p}_{t+\Delta t/2} = \frac{1}{2}\ (\underline{p}_{t+\Delta t} + \underline{p}_t) \tag{26}$$

gesetzt wird, läßt sich (25) in

$$(2\ \underline{T}_1 - s\ \underline{T}_o)\ \underline{p}_{t+\Delta t/2} = 2\ \underline{T}_1\ \underline{p}_t \tag{27}$$

umformen. Das LGS (27) liefert den Druckvektor zum Zeitpunkt $t+\Delta t/2$. Derjenige für $t+\Delta t$ muß aus (26) gewonnen werden.

3.2 Übertragungsmatrizen

Die beiden Systeme

$$\underline{E}\ \dot{\underline{p}}_j - \frac{c_v}{h^2}\ \underline{T}_o\ \underline{p}_j = \Theta \tag{5}$$

und

$$h\ \underline{T}_1\ \dot{\underline{p}}_j - \frac{c_v}{h}\ \underline{T}_o\ \underline{p}_j = \Theta \tag{19}$$

sollen auf die Form

$$\underline{p}_{j+1} = \underline{A}\ \underline{p}_j \tag{28}$$

gebracht werden.
Für die zeitliche Ableitung wird

$$\dot{\underline{p}}_j = \frac{1}{\Delta t}\ (\underline{p}_{j+1} - \underline{p}_j) \tag{29}$$

gesetzt. Crank-Nicolson (CN) formulieren (5) unter Verwendung von (29) in der Gestalt

$$(2\underline{E} - s\ \underline{T}_o)\ \underline{p}_{j+1} = (2\underline{E} + s\ \underline{T}_o)\ \underline{p}_j \tag{30}$$

Anschließende Inversion liefert die Übertragungsmatrix

$$\underline{A}_{CN} = (2\underline{E} - s\,\underline{T}_o)^{-1}\,(2\underline{E} + s\,\underline{T}_o) \qquad (31)$$

für das System (5). Wie unmittelbar aus (25) zu ersehen ist, kann dort

$$\underline{A}_{FEM} = (2\,\underline{T}_1 - s\,\underline{T}_o)^{-1}\,(2\,\underline{T}_1 + s\,\underline{T}_o) \qquad (32)$$

abgeleitet werden.

Die Matrix (32) kann auch aus dem System (19) auf die gleiche Weise wie Crank-Nicolson hergeleitet werden.

In Verbindung mit den Systemen (25), (30), (31) und (32) taucht die Frage auf, für welche Parameter s eindeutige Lösungen existieren. Zunächst wird die Definition

$$\underline{T}_o^* = -\,\underline{T}_o$$

vereinbart. Aus den Beziehungen (10) und (11) ist ersichtlich, daß die Systemmatrizen $\underline{T}_o^*$ und $\underline{T}_1$ symmetrisch sind. Ferner offenbaren die Elementmatrizen (15) bzw. (17), daß sämtliche Hauptdiagonalelemente der Matrizen $\underline{T}_o^*$ und T_1 positiv sind. Das ist notwendig (aber noch nicht hinreichend), wenn die Matrizen $\underline{T}_o^*$ und $\underline{T}_1$ als positiv definit betrachtet werden. Dies soll vorausgesetzt werden. Somit gilt für die zugehörigen Determinanten die Aussage

$$\det(\underline{T}_o^*) > o \quad \text{und} \quad \det(\underline{T}_1) > o \qquad (+)$$

Auf Grund der Tatsache, daß der Parameter s nur positiv (s>o) gewählt wird, gelten infolge Determinatenaddition die Ungleichungen

$$\det(2\,\underline{E} + s\,\underline{T}_o^*) > o \quad \text{und} \quad \det(2\,\underline{T}_1 + s\,\underline{T}_o^*) > o \qquad (++)$$

Unter der Voraussetzung (++) sind die Lösungen der LGSe (25) und (30) bzw. die der Übertragungsmatrizen (31) und (32) für beliebige positive Werte s eindeutig.

3.3 Abschätzung des Rechenaufwandes

Die Abschätzung des Rechenaufwandes bezieht sich auf die Anzahl von Multiplikationen/Divisionen. Als Ausgangspunkt wird das System

$$\underline{A}_o \; \underline{p}_{j+1} = \underline{A}_1 \; \underline{p}_j + \underline{r}_j^B = \underline{r}_j^* \tag{33}$$

betrachtet. Die Bedeutung der Matrizen $\underline{A}_o$ bzw. $\underline{A}_1$ wird aus den Gl. (25) bzw. (30) ersichtlich. Der Vollständigkeit halber erscheint auf der rechten Seite noch der Vektor $\underline{r}_j^B$. Wie aus Gl. (28) hervorgeht, läßt sich Gl. (33) in die Form

$$\underline{p}_{j+1} = \underline{A} \; \underline{p}_j + \underline{A}_o^{-1} \; \underline{r}_j^B \tag{34}$$

überführen. Die Übertragungsmatrix $\underline{A}$ hat die Gestalt

$$\underline{A} = \underline{A}_o^{-1} \; \underline{A}_1 \tag{35}$$

Nachdem die Matrizen $\underline{A}_o$ und $\underline{A}_1$ vorhanden sind, kann die eigentliche Zeititeration beginnen. Die Gesamtanzahl der Iterationen betrage i_t, so daß der Index j aus dem Intervall $j \in [0, i_t]$ stammt. Außerdem soll der Umstand berücksichtigt werden, daß die Schrittweite Δt k_t-mal erhöht worden ist, um den Wert von i_t möglichst klein zu halten.

Zur Lösung der Systeme (33) und (34) steht der Gaußsche Algorithmus zur Verfügung. Ist die Matrix $\underline{A}_o$ symmetrisch, kann auch das Verfahren nach Cholesky benutzt werden, das den Vorteil hat, auch noch für schlecht konditionierte Koeffizientenmatrizen geeignet zu sein. Im Gegensatz zu "Gauß" kann bei "Cholesky" im Falle der pos. Definitheit der Matrix $\underline{A}_o$ auf jegliche Pivotisierung verzichtet werden.

Beide Algorithmen können für die Verfahren (25) bzw. (30) verwendet werden.

Zunächst gilt es, die obere Dreiecksform von $\underline{A}_o$ zu finden. Bei n Unbekannten beträgt die Anzahl der Rechenoperationen m beim Gaußschen Verfahren |10|

$$m_1^G \approx \frac{n^3}{3} \tag{36}$$

während für "Cholesky" |10|

$$m_1^C \approx \frac{n^3}{6} \tag{37}$$

angesetzt werden muß. Zu (37) kommen noch n Quadratwurzelberechnungen. Bei Verwendung des LGSs (33) muß die rechte Seite $\underline{r}_j^*$ gebildet werden, wozu

$$m_r = n^2 \tag{38}$$

Operationen gebraucht werden. Die Modifizierung der neuen rechten Seite benötigt mit "Gauß"

$$m_2^G \approx \frac{n^2}{2} \tag{39}$$

Die Lösung des Systems mit Dreiecksform erfordert

$$m_3^G \approx \frac{n^2}{2} \tag{40}$$

Da die obere Dreiecksform nicht bei jedem Zeitschritt neu errechnet wird, werden mit dem Gaußschen Algorithmus pro Iterationsschritt j

$$m_j^G \approx 2n^2 \tag{41}$$

Rechenoperationen ausgeführt. Insgesamt beläuft sich der Rechenaufwand für das LGS (33) mit "Gauß" somit auf

$$m_{LGS}^G \approx \frac{k}{3}t\, n^3 + 2\, i_t\, n^2 \tag{42}$$

Die Methode von Cholesky erfordert die Lösung zweier Dreiekkssysteme mit

$$m_2^C = n^2 + n \tag{43}$$

Operationen, so daß der Gesamtaufwand für das LGS (33) mit der Methode nach Cholesky mit

$$m_{LGS}^C \approx \frac{k}{6}t\, n^3 + i_t\, (2n^2 + n) \tag{44}$$

beziffert wird. In Gl. (44) müßten $(n\, k_t)$ Quadratwurzelbildungen hinzugezählt werden.

Ein erheblicher Nachteil mit Übertragungsmatrizen zu arbeiten, besteht in dem simplen Umstand, daß der eigentlichen Zeititeration eine Inversion und zwei Multiplikationen vorausgehen. Die Matrizen-

inversion nach "Gauß" erfordert

$$m_I^G \approx n^3 \quad , \tag{45}$$

während für die mit "Cholesky" nur

$$m_I^C \approx \frac{n^3}{2} \tag{46}$$

anzusetzen ist. Die Matrizenmultiplikation $\underline{A}_o^{-1}\ \underline{A}_1$ addiert weitere

$$m_M = n^3 \tag{47}$$

und die Vektor-Matrixmultiplikation bedarf

$$m_r = n^2 \tag{48}$$

Rechenoperationen. Für die Aufbereitung des Systems (34) sind nach "Gauß"

$$m^G \approx 2n^3 + n^2 \tag{49}$$

und nach "Cholesky"

$$m^C \approx \frac{3}{2} n^3 + n^2 \tag{50}$$

Rechenschritte erforderlich. Der Vorteil der Übertragungsmatrizen folgt aus der geringen Anzahl m pro Iteration j, für die

$$m_{A,j} = n^2 \tag{51}$$

angegeben wird. Der Gesamtaufwand für das System (34) mit dem Gaußschen Algorithmus läßt sich zu

$$m_A^G \approx 2\, k_t\, n^3 + n^2\, (k_t + i_t) \tag{52}$$

summieren. Mit dem Verfahren nach Cholesky müssen

$$m_A^C \approx \frac{3}{2}\, k_t\, n^3 + n^2\, (k_t + i_t) \tag{53}$$

angesetzt werden. Ein Vergleich zwischen (42) und (44) bzw. zwischen (52) und (53) offenbart, daß der Unterschied in der Anzahl der Rechenoperationen beider Algorithmen nicht so gravierend ist.

In Worten ausgedrückt, bedeuten die Gl. (42) und (44) bzw. (52) und (53), daß ein Erhöhen des Faktors k_t die Rechenoperationen um n^3 während ein Anwachsen des Faktors i_t dieselbigen nur um n^2 ansteigen läßt. Ähnliche Verhältnisse gelten für die Rechenzeit. Daraus läßt sich die Schlußfolgerung ziehen, daß sinnvolle Strategien für die praktische Zeititeration nicht allein eine Verringerung des Wertes i_t zum Ziele haben können, die durch ständiges Ansteigen der Schrittweite Δt erkauft wird. Das bedeutet, ein Minimum an Rechenoperationen - und somit an Rechenzeit - wird in Abhängigkeit der Unbekanntenanzahl n nur durch Berücksichtigung der beiden Größen k_t und i_t erreicht.

Es verbleibt, die Frage zu lösen, ob in Abhängigkeit der Parameter i_t, k_t und n das LGS (33) oder das System (34) mit der Übertragungsmatrix (35) gewählt werden soll. Zur Beantwortung werden die Beziehungen (44) und (53) gleichgesetzt.

$$\frac{k}{6}t\, n^3 + i_t\,(2n^2+n) = \frac{3}{2}\, k_t\, n^3 + n^2(i_t+k_t) \qquad (54)$$

Bei Vernachlässigung des linearen Terms in n erhält man

$$n^2\,\left[1.33\, k_t\, n - (i_t - k_t)\right] \approx 0 \qquad (55)$$

Aus Gl. (55) geht die Abschätzung

$$n \approx (i_t - k_t)/1.33\, k_t \qquad (56)$$

hervor. Ein Zahlenbeispiel möge (56) veranschaulichen. Für $k_t = 2$ und $i_t = 150$ liefert (56)

$$n \approx 56\ , \qquad (57)$$

d.h. für $n < 56$ ist das System (34) günstiger.

4. Experimentell numerische Fehleruntersuchungen

Das Beispiel der zweiseitigen Drainage soll zur besseren Erklärung numerischer Effekte mit verschiedenen Anfangsbedingungen gerechnet werden. Die analytische Lösung $u(z,t)$der DGL (1) mit den R.B.

$$u(o,t) = u(\ell,t) = 0 \tag{58}$$

und der A.B.

$$u(z,o) = u_o \tag{59}$$

lautet |11|

$$u(z,t) = \frac{4}{\pi} u_o \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k\,Mt} \sin\left(\frac{k}{2H} z\right) \tag{60}$$

mit $M = \frac{\pi^2 c_v}{4H}$ und $k = 2m-1$

Zunächst soll von der unendlichen Reihe nur das erste Glied mitgenommen werden.

$$u_1(z,t) = u_o e^{-Mt} \sin\left(\frac{\pi z}{2H}\right) \tag{61}$$

Es gelten die R.B. (58), aber die A.B.

$$u_1(z,o) = u_o \sin\left(\frac{\pi z}{2H}\right) \tag{62}$$

Dieser Fall ist physikalisch nicht relevant. Diese partikuläre Lösung von (1) hat den Vorteil, eingliedrig zu sein, d.h. die äußere Gestalt (61) entspricht formell dem Ansatz (8) der FEM-Rechnung.

Näherungslösungen werden mit den Übertragungsmatrizen $\underline{A}_{CN}$ und $\underline{A}_{FEM}$ erzeugt. Simultan wurden Lösungen mit Hilfe der zugehörigen LGSe errechnet. Es hat sich herausgestellt, daß die Ergebnisse beider Formulierungen auch über lange Zeiten hinweg völlig miteinander übereinstimmen. Untersucht wird sowohl der absolute Fehler

$$e = p - u \tag{63}$$

als auch der relative Fehler in Prozent

$$\varepsilon = (p-u)/u \cdot 100 \tag{64}$$

Als dimensionslose Größen dienen

$$\Delta T = \Delta t \frac{c_v}{h^2} \tag{65}$$

$$T = t \frac{c_v}{H^2} \tag{66}$$

Für alle Beispiele wurde die Schichtdicke ℓ in 20 Elemente, d.h. 21 Knoten aufgeteilt.

4.1 Sinusprofil

Der exakte Druckverlauf in Schichtmitte (Knoten 11) für zweiseitige Drainage ist in Bild 3 zu sehen.

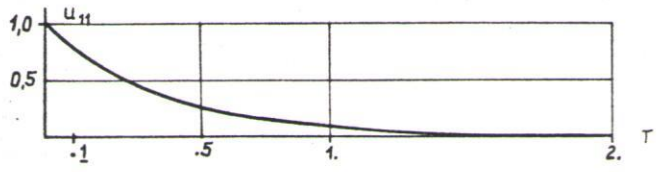

Bild 3: Druckverlauf in Schichtmitte

Die folgenden Fehlerdarstellungen beziehen sich für FEM immer auf das lineare Element. Der absolute Fehler e_{11} in Schichtmitte für FEM ist in Bild 4 dargestellt.

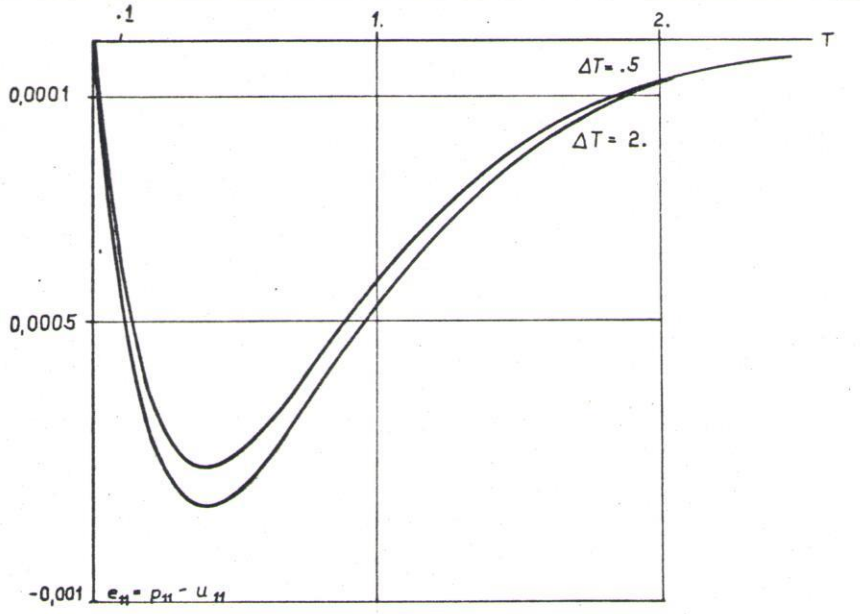

Bild 4: Absoluter Fehler, Sinusprofil, FEM

In Bild 5 wird der Vergleich mit Crank-Nicolson (CN) gezogen.

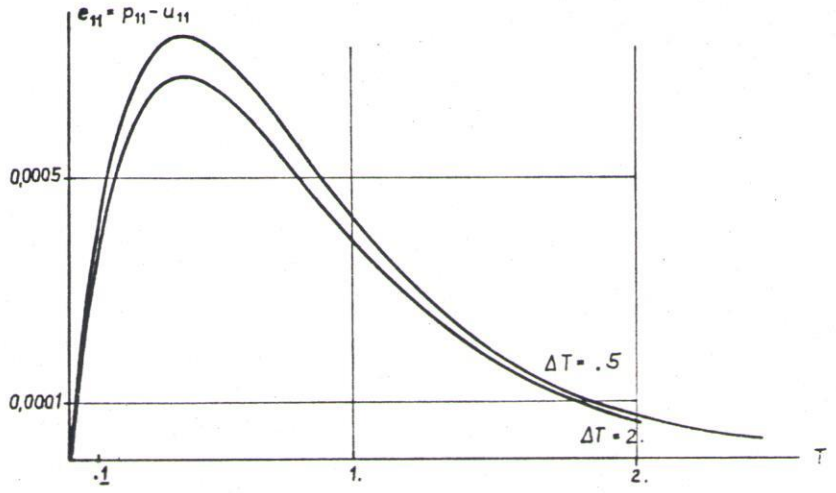

Bild 5: Absoluter Fehler, Sinusprofil, CN

Der örtliche Verlauf des Fehler e ist zu ausgewählten Zeiten für die beiden Verfahren in den Bildern 6 und 7 aufgetragen worden.

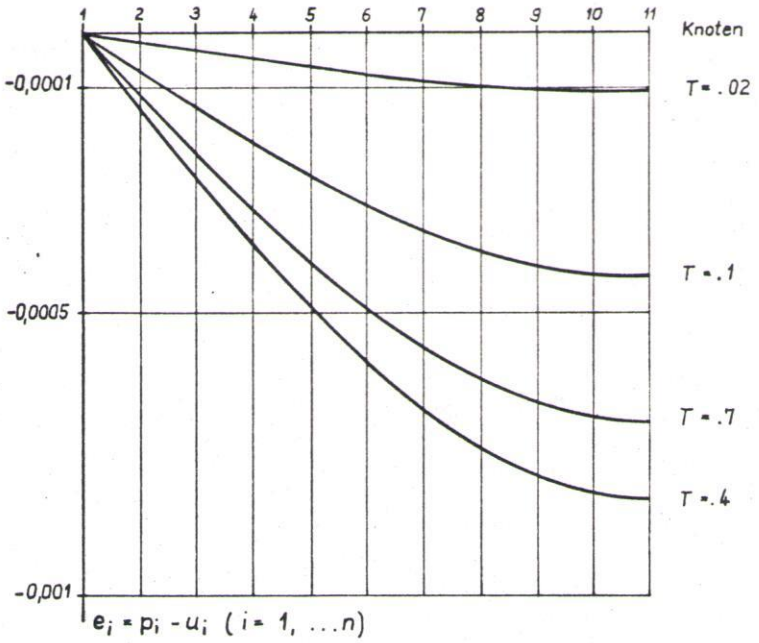

Bild 6: Absoluter Fehler, Sinusprofil, FEM, $\Delta t \triangleq 2$.

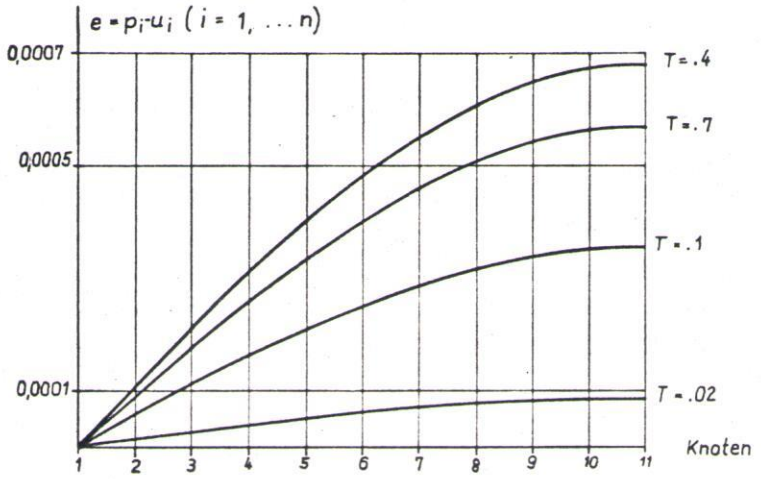

Bild 7: Absoluter Fehler, Sinusprofil, CN, $\Delta t = 2$.

Wie aus den beiden letzten Bildern ersichtlich ist, ist der Verlauf von e offenbar der Funktion $\sin z$ proportional.

Gleichung (64) ergibt, daß zu einer festen Zeit T der Wert des relativen Fehlers ε in allen Knotenpunkten gleich sein muß. Die Numerik bestätigt dies. Die ε-Kurven in den Bildern 8 und 9 sind somit unabhängig von der z-Koordinate.

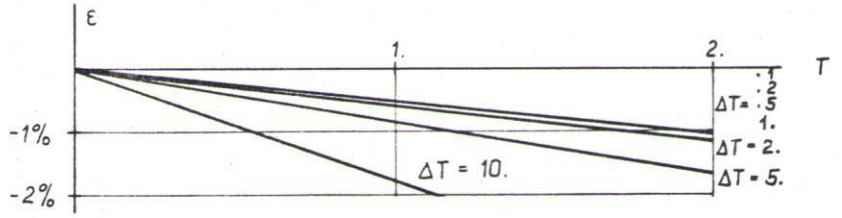

Bild 8: Relativer Fehler, Sinusprofil, FEM

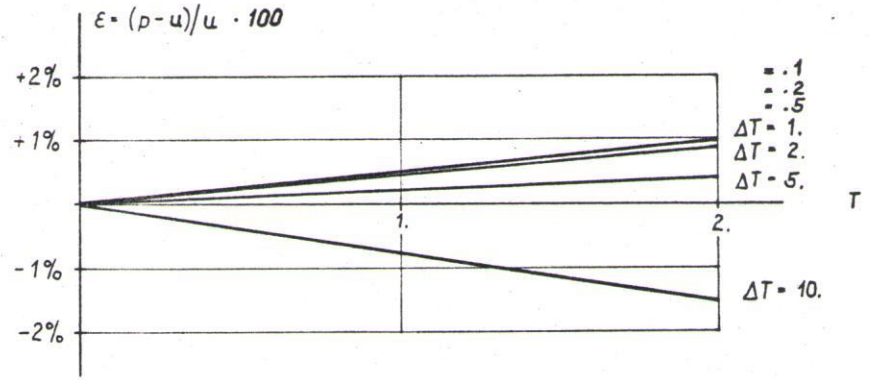

Bild 9: Relativer Fehler, Sinusprofil, CN

Zu zwei verschiedenen Zeiten (T = .4 und T = 1.) wurde der relative Fehler ε als Funktion der Schrittweite Δt aus den Ergebnissen gemäß den Bildern 8 und 9 ermittelt. Das Resultat für FEM und CN ist in Bild 10 zu sehen.

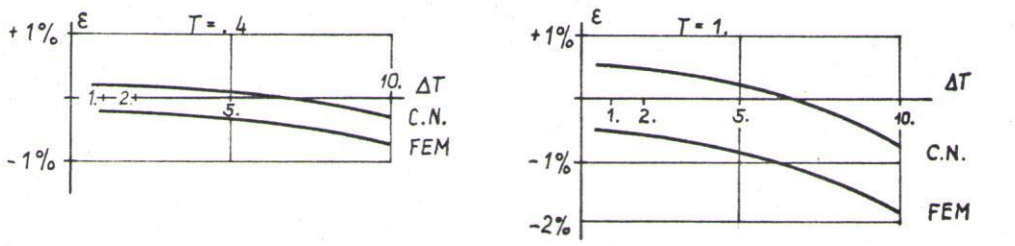

Bild 10: Relativer Fehler ε = ε(Δt) für FEM und CN

4.2 Rechteckprofil

Die Ausrundung des Rechteckprofils bis zum Sinusprofil verursacht ein schwingendes Verhalten der Näherungslösung um den exakten Wert. Eine ähnliche Beobachtung machten Wilson u. Nickell |2|, S. 285, Fig. 7. Länge und Amplitude des Einschwingvorganges hängen stark von ΔT ab und sind in den einzelnen Knoten völlig verschieden. Eine Voraussage erscheint kaum möglich. Die in den Bildern 11 und 12 vorhandenen Markierungen stellen Werte des relativen Fehlers für unmittelbar aufeinanderfolgende Iterationsschritte dar.

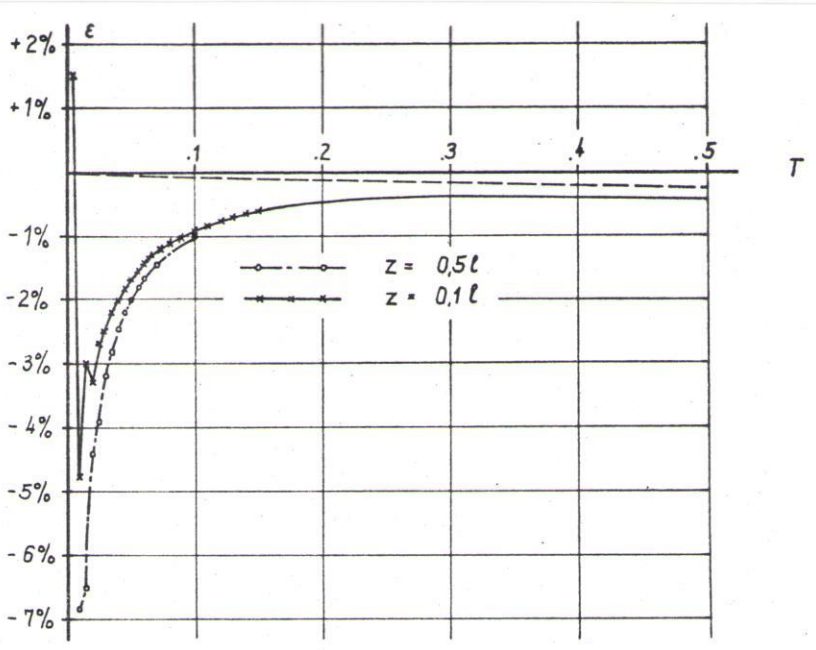

Bild 11: Relativer Fehler, Rechteckprofil, FEM, ΔT = .5

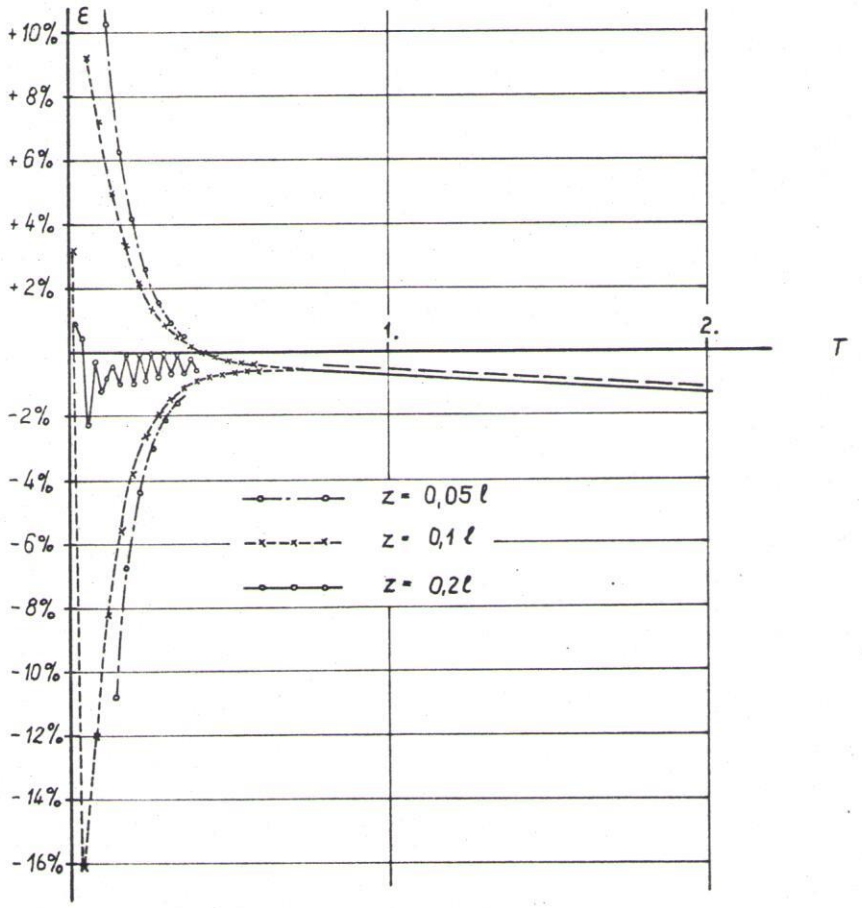

Bild 12: Relativer Fehler, Rechteckprofil, FEM, $\Delta T = 2$.

Nach Abklingen des Einschwingvorganges ist ε in allen Knoten gleich und entspricht im weiteren Verlauf in etwa demjenigen des Sinusprofils (gestrichelte Linie). Während für $\Delta T = .5$ das Vorzeichen von ε nach kurzer Zeit beibehalten wird, ist für $\Delta T = 2.$ ein ständiger Vorzeichenwechsel zu beobachten. Aus diesem Grunde erscheint eine Fehlerdarstellung in der Form $\varepsilon=\varepsilon(\Delta t)$, wie in |3| und |4| geschehen, für dieses Beispiel wenig sinnvoll.

Das "einfache" Differenzenverfahren (5) in der Fassung (31) zeigt ein prinzipiell gleiches jedoch wesentlich ruhigeres Verhalten (Bild 13). Der Tausch der Matrix E gegen die Matrix T_1 hat offenbar keinen Vorteil erbracht.

Das in den Bildern 11 und 12 dokumentierte Verhalten des relativen Fehlers ε für FEM hat zahlreiche Autoren, u.a. |6|, dazu verleitet, die numerische Rechnung mit kleiner Schrittweite ΔT zu beginnen. Um die Rechenzeit zu mindern, wird ΔT dann allmählich erhöht. Dies hat zur Folge, daß die Übertragungsmatrix $\underline{A}_{FEM}$ bzw. das LGS (27) ständig neu aufgebaut werden müssen. Eigene Testergebnisse haben jedoch ergeben, daß dieser Aufwand reduziert werden

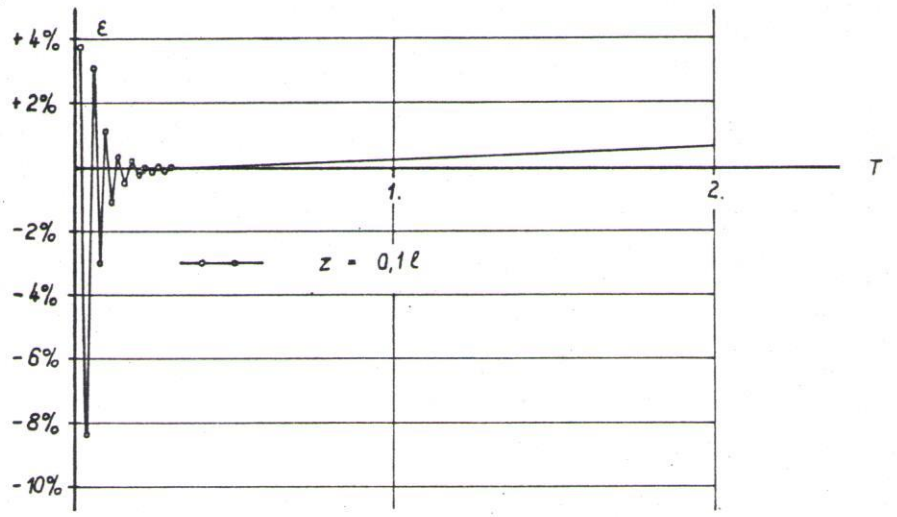

Bild 13: Relativer Fehler, Rechteckprofil, CN, $\Delta T = 2.$

kann. Um ein gutes Fehlerverhalten zu erreichen, wird eine Anlaufrechnung mit geringerem ΔT durchgeführt. Zu einem vorgewählten Zeitpunkt T_o wird die Schrittweite ΔT dann schlagartig auf den Wert erhöht, dessen zugehöriger Fehlerverlauf sich in vertretbaren Grenzen hält. Die hier willkürlich vorgenommene Erhöhung von $\Delta T = .5$ auf $\Delta T = 5.$ hat auf die Stabilität der Numerik noch keinen merkbaren Einfluß gehabt. Für dieses Beispiel in Bild 14 wurden 76 Iterationen benötigt.

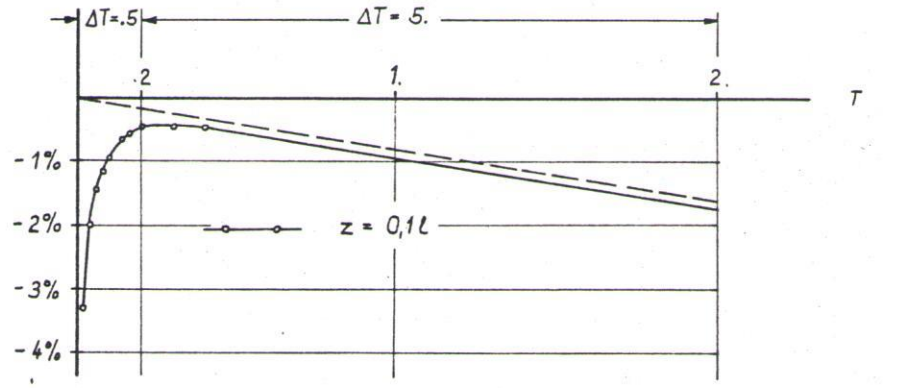

Bild 14: Relativer Fehler mit Anlaufrechnung, Rechteckprofil, FEM

Die Strategie der Anlaufrechnung und die Wahl des Zeitpunktes T_o hängen von der anfangs gewählten Schrittweite ΔT, von dem numerischen Verfahren, dem physikalischen Problem und nicht zuletzt vom subjektiven Verhalten des Benutzers ab. In den sich in unmittelbarer Nachbarschaft des Randes befindlichen Knoten schwingt der Fehler am stärksten. Stände keine analytische Vergleichslösung zur Verfügung, müßten in diesen Punkten die numerischen Ergebnisse mehrerer aufeinanderfolgender Iterationen beobachtet werden. Somit wird in etwa aus den zahlenmäßigen Werten entnommen, wie schnell die Schwankungen gedämpft werden. Bei genügend "kleiner"Wahl von ΔT kann die Anlaufrech-

nung schon nach "wenigen" Iterationsschritten (∿20÷30) beendet werden. Bei diesem eingeschwungenen Zustand darf die Schrittweite ΔT sprunghaft, d.h. sehr stark, erhöht werden. Da die Fehlerverläufe in diesem parabolischen Beispiel für Crank-Nicolson günstiger ausfallen als für FEM, kann der Wert von T_o für C.N. natürlich kleiner angesetzt werden als für FEM. Es steht dem Benutzer frei, die Anlaufrechnung über die hier geschilderte Praxis auszudehnen. Jede gute Zeititeration sollte unabhängig von der Anzahl der Unbekannten mit insgesamt 150 Schritten ($i_t \approx 150$) auskommen.

5. Modifikation für geschichtete Medien

Die finiten Gleichungen (19) werden für jede Schicht mit den entsprechenden c_v^e-Werten und Elementlängen h^e hingeschrieben. Die Übergangsbedingungen an der Schichtgrenze z_ν sind beim linearen Element die Stetigkeit des Drucks und beim kubischen zusätzlich die Kontinuitätsgleichung (16). Das Verhältnis der Permeabilitäten $k_\nu / k_{\nu+1}$ wird im zweiten Fall dadurch berücksichtigt, daß mit Hilfe

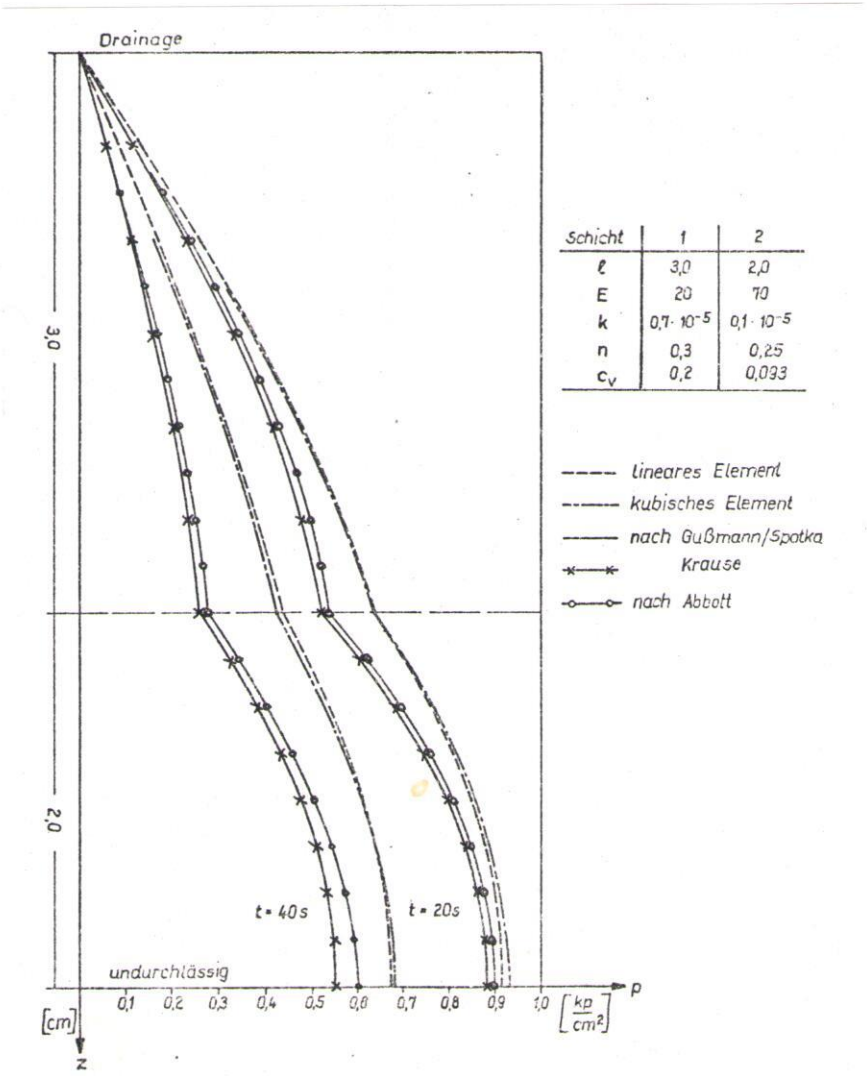

Bild 15: Beispiel für zwei Schichten

von (16) entweder nur der rechte oder der linke Druckgradient als unbekannt mitgeführt wird. Für geschichtete Medien sind auch analytische Wege |7| und |8| beschritten worden. Ein Zahlenbeispiel ohne praktische Bedeutung (Bild 15) offenbart die schlechte Übereinstimmung für beide Elementtypen mit einer Lösung nach Gußmann/Spotka |8|.

Dieser Mißstand ist auf die Tatsache zurückzuführen, daß an der Stelle z_ν nicht nur die erste sondern alle weiteren partiellen Ableitungen nach z unstetig verlaufen, d.h. die DGL (1) ist für $z=z_\nu$ nicht eindeutig definiert. Somit repräsentiert die Matrix T_o in der ν-ten Zeile beim linearen bzw. in der $(2\nu-1)$-ten und 2ν-ten Zeile beim kubischen Element einen Wert, der nicht existiert. Die betreffenden Zeilen sind also inkonsistent.

Für das Differenzenverfahren wird im folgenden eine Korrekturformel für die zweite partielle Ableitung vorgeschlagen. Die Herleitung läßt sich nicht auf das Variationsprinzip (7) ausdehnen und ist auf den eindimensionalen Fall bezogen. Zu diesem Zweck wird für $z=z_\nu$ die rechtsseitige

$$p(z_\nu+h_{\nu+1}) = p_\nu + h_{\nu+1} \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=+z_\nu} + \frac{h^2_{\nu+1}}{2} \left.\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right|_{z=+z_\nu} + \ldots \qquad (67)$$

und die linksseitige Taylorentwicklung

$$p(z_\nu-h_\nu) = p_\nu - h_\nu \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=-z_\nu} + \frac{h^2_\nu}{2} \left.\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right|_{z=-z_\nu} + \ldots \qquad (68)$$

hingeschrieben. Entscheidet man sich dafür in dem System (19) - lineares Element - in der ν-ten Zeile z.B. den Wert $c_{\nu,\nu} \left.\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right|_{z=-z_\nu}$ durch einen finiten Ausdruck darzustellen, so muß (67) und (68) entsprechend aufgelöst werden. Dies geschieht dadurch, daß außer der Kontinuitätsgleichung (16) noch die Beziehung

$$k_\nu \left.\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right|_{z=-z_\nu} = k_{\nu+1} \left.\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right|_{z=+z_\nu} \qquad (69)$$

eingeführt wird. Diese folgt aus der Forderung, daß nicht nur das Geschwindigkeits- sondern auch das Beschleunigungsfeld der

Flüssigkeitsteilchen stetig verlaufen soll. Nach kurzer Zwischenrechnung folgt aus (67) bzw. (68) mit (16) und (69) der Ausdruck

$$c_{v,\nu} \left.\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right|_{z=-z_\nu} \approx g_1 \left[h_o\, g_o\, p_{\nu-1} - (1+h_o g_o) p_\nu + p_{\nu+1}\right] \qquad (70)$$

mit

$$h_o = \frac{h_{\nu+1}}{h_\nu} \quad , \qquad g_o = \frac{k_\nu}{k_{\nu+1}}$$

und

$$g_1 = 2\, c_{v,\nu+1} / (g_o\, c_{v,\nu+1}\, h_{\nu+1}^2 / c_{v,\nu} + h_\nu^2)$$

Das Resultat dieser etwas kompliziert erscheinenden Gewichtung der ν-ten Zeile ist ebenfalls in Bild 15 eingetragen worden.

Ein anderes Beispiel für vier Schichten ist in Bild 16 zu sehen. Für FEM wurden mit Anlaufrechnung bei Verwendung von 39 Unbekannten etwa 160 Iterationen benötigt, was einer Rechenzeit von ca. 30 sec an der Anlage CD 6500 entspricht.

Für das Differenzenverfahren hat sich Abbott |9| eine Modifizierung überlegt. Die Übereinstimmung nach dieser Idee ist in Bild 15 nicht ganz so gut wie in Bild 16. Einschränkend ist zu bemerken, daß für diese Ergebnisse äquidistante Stützstellen benutzt werden mußten.

Die Frage, warum in |3| und |4| auch ohne Korrektur relativ gute Ergebnisse erzielt worden sind, läßt sich nun beantworten. Für den Spezialfall

$$\frac{k_\nu}{k_{\nu+1}} = \frac{c_{v,\nu}}{c_{v,\nu+1}} \qquad (71)$$

und $h_\nu = h_{\nu+1} = h$ vereinfacht sich die rechte Seite der Gl. (70) zu dem bekannten Ausdruck,

$$\approx \frac{1}{h^2} \left[c_{v,\nu}\, p_{\nu-1} - (c_{v,\nu} + c_{v,\nu+1}) p_\nu + c_{v,\nu+1}\, p_{\nu+1}\right] \qquad (72)$$

der sich ergibt, wenn die einzelnen Schichten nur unter Beachtung der Stetigkeit des Drucks zusammengefaßt werden. Die Relation (71) wird in den von |3| und |4| vorgeführten Beispielen in etwa gewahrt.

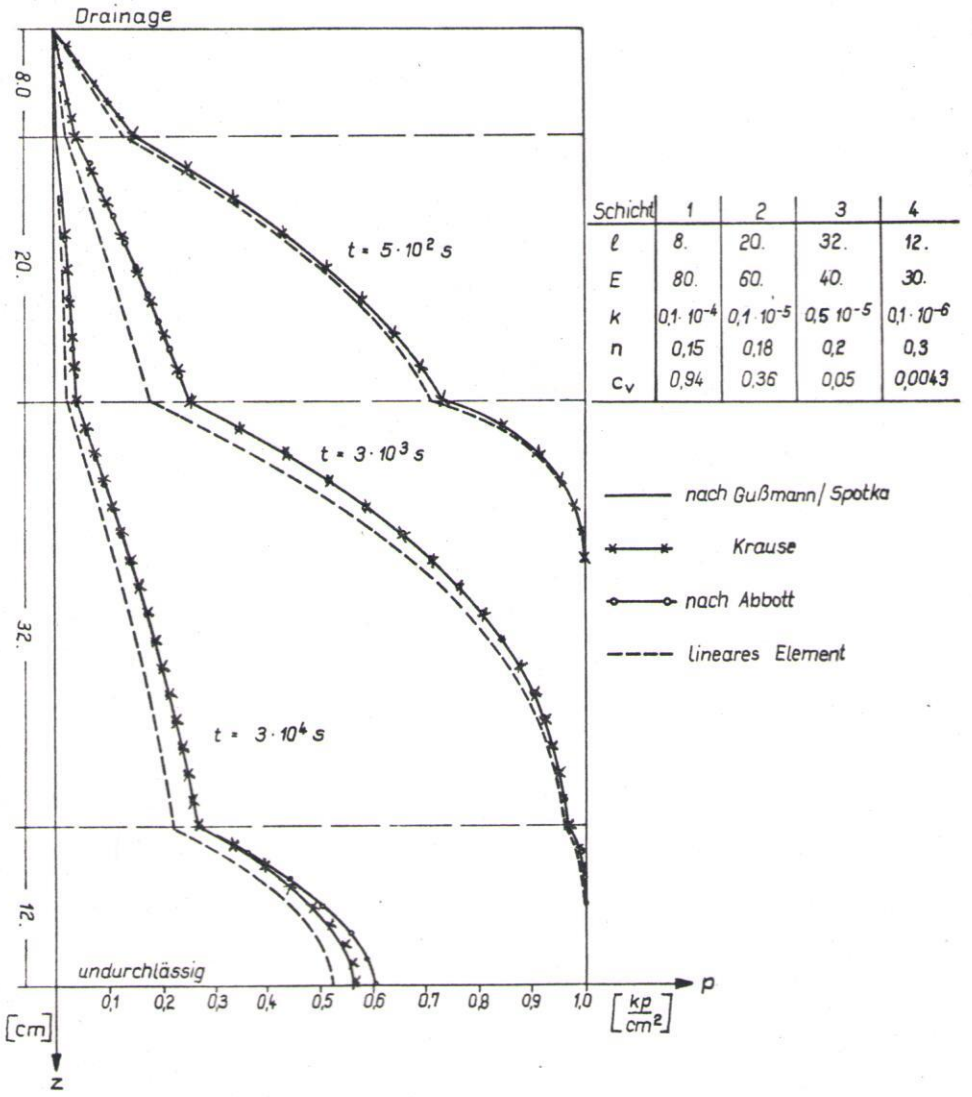

Bild 16: Beispiel für vier Schichten

6. Zusammenfassung

Die wichtigsten Erkenntnisse dieses Kapitels rekapituliert sind folgende.

Nachdem zwei verschiedene finite Systeme gemäß FD und FEM aufgestellt worden sind, wurden experimentelle Fehleruntersuchungen für unterschiedliche Anfangsbedingungen durchgeführt. Für die in den Bildern 4 bis 14 gezeigten Fehlerverläufen dürften analytische Ausdrücke schwer erhältlich sein. Aus den Fehlerverläufen für diese parabolische Diffferentialgleichung und der Abschätzung des

Rechenaufwandes wurde eine Strategie für die praktische Zeititeration entworfen. Mit Hilfe einer Anlaufrechnung wird der Fehler in vertretbaren Grenzen gehalten und die Anzahl der Iterationsschritte reduziert. Strategien für die Zeititeration allein unter dem Blickpunkt einer Minimisierung des Wertes i_t zu befolgen, ist nicht sinnvoll. In diesem Sinne kann diese Praxis auf andere parabolische Probleme angewendet werden.

Für geschichtete Medien konnte experimentell bewiesen werden, daß der von Desai u.a. eingeschlagene Lösungsweg falsch ist. Daraufhin wurde eine verallgemeinerte Differenzenformel entwickelt, in der die nötigen Übergangsbedingungen berücksichtigt wurden. Die numerischen Ergebnisse nach dieser Korrektur sind besser als die nach einem anderen Vorschlag von Abbott.

7. Bezeichnungen

$\underline{A}_o$, $\underline{A}_1$ = Koeffizientenmatrizen

A, $\underline{A}_{CN}$, $\underline{A}_{FEM}$ = Übergangsmatrizen

$\underline{B}$, $\underline{B}^e$ = FEM-Matrizen

c_v, c_v^e, $c_{v,1}$, $c_{v,2}$ = Verdichtungsbeiwerte, Bild 1

$\underline{C}$, $\underline{C}^e$ = FEM-Matrizen

e = absoluter Fehler, Gl. (63)

E_o, E_1, E_2 = Elastizitätsmoduli

$\overline{E}_S$ = Steifeziffer

$\underline{E}$ = Einheitsmatrix

h, h^e = Schrittweiten

H = Entwässerungsweg, Bild 1

i_t = Anzahl der Zeititerationen

k_o, k_1, k_2, k_i = Permeabilitäten, Bild 1

k_t = Anzahl der Zeitintervallerhöhungen

l, l_1, l_2 = Schichtdicken, Bild 1

m_A^C, m_A^G, m_{LGs}^C, m_{LGs}^G, usw. = Anzahl der Rechenoperationen

n = Anzahl der Elemente

n_o, n_1, n_2 = relative Porenvolumina, Bild 1

p = Porenwasserüberdruck

$\underline{p}$, $\underline{p}^e$, $\underline{p}_o$ = Druckvektoren

$\underline{r}$ = Anfangsdruckvektor, Gl. (12)

$\underline{r}^*$, $\underline{r}^B$ = Vektoren der rechten Seite, Gl.(33,34)

t = Zeitkoordinate

Δt = Zeitintervall

ΔT, T = dimensionslose Größen, Gl.(65,66)

$\underline{T}_o$, T_o^*, $\underline{T}_1$ = Systemmatrizen

T_o = Parameter der Anlaufrechnung

u = Porenwasserüberdruck (analytisch), Gl. (60)

z = Ortskoordinate

γ = spez. Gew. Flüssigkeit

ε = relativer Fehler, Gl. (64)

$\underline{\Theta}$ = Nullvektor

Literaturverzeichnis:

[1]	Gurtin, M.E.	Varitional Principles for linear initial-value problems. Quart. Appl. Math., XXII, No. 3, 1964
[2]	Wilson, E.L. und Nickell, R.E.	Application of the finite element method to heat conduction analysis. Nuclear Engg. and Design 4, 276-286, 1966
[3]	Desai, C.S. und Johnson, L.D.	Evaluation of two finite element formulations for one-dimensional consolidation. Computer & Structures, Vol. 2, 1972, S. 469-486
[4]	Desai, C.S. und Johnson, L.D.	Evaluation of some numerical schemes for consolidation. Int. J. Num. Meth. Engg., Vol. 7, S. 243-254, 1973
[5]	Sandhu, R.S. und Wilson, E.L.	Finite element analysis of seepage in elastic media. ASCE, Vol. 95, No. EM 3, 1969
[6]	Hwang, C.T, Morgenstern, N.R. und Muray, D.W.	On solution of plane strain consolidation problems by finite element methods. Can. Geotechnical J., Vol. 8, 1971, S. 109-118
[7]	Schiffmann, R.L. und Stein, J.R.	One-dimensional consolidation of layered Systems. ASCE, Vol. 96, No. SM 4, July 1970
[8]	Gußmann, P. und Spotka, H.	Eindimensionale Konsolidation mehrschichtiger Tonböden. Die Bautechnik 50(1973), H. 8, S. 265
[9]	Abbott, M.B.	One-dimensional consolidation of multi-layered soils Géotechnique, 10(1960), S. 151-165

[10]	Isaacson/Keller	Analyse Numerischer Verfahren Verlag Harri Deutsch, Zürich, 1973.
[11]	Terzaghi, K. u. Fröhlich, O.K.	Theorie der Setzung von Tonschichten. Leipzig u. Wien: Franz Deuticke, 1936

III. Kapitel:

Mechanik der Gemische - mit Bezug auf gesättigte, poröse Medien

1. Einleitung

Die Theorie der Gemische, zusammengesetzt aus mehreren festen, flüssigen und gasförmigen Medien, hat Untersuchungen über Bewegungs-, Kontinuitäts- und Materialgleichungen der einzelnen Komponenten zum Gegenstand. Insbesondere kommt sie bei Diffusionsproblemen zur Anwendung.

Ein spezieller Fall, das Gemisch fest-flüssig, wird in den Theorien über Konsolidationsvorgänge in der Bodenmechanik untersucht. Zunächst handelt es sich darum, zu überprüfen, inwiefern die Konsolidationstheorien in dieser allgemeineren Theorie enthalten sind. Ausgehend von den Arbeiten von GREEN u.a. |23|, |24|, |25|, werden die Aussagen von BIOT |9|, |12|, MANDEL |14| und HEINRICH u. DESOYER |17| als Sonderfälle erkannt. Auf dieser einheitlichen Formulierung können dann später numerische Rechnungen durchgeführt werden.

2. Kurzer Abriss der historischen Entwicklung

Konsolidation bedeutet Setzung. Derartige Prozesse sind für die Bodenmechanik von großer Bedeutung, wie das Beispiel des Schiefen Turmes von Pisa zeigt und betreffen die bindigen Böden wie z.B. Tone.

Für den eindimensionalen Fall hat als erster TERZAGHI (1925), |1| eine Differentialgleichung für den Porenwasserüberdruck angegeben, die in der Form mit der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung übereinstimmt. Als Modellvorstellung für die Konsolidierung hat TERZAGHI ein mechanisches Kammernsystem |2|, Bild 1, entworfen, dessen Gleichungen der Differenzenform der Terzaghischen DGL entsprechen |8|

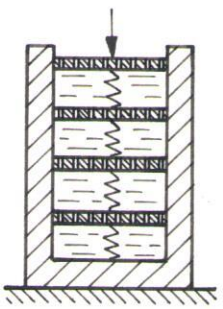

Bild 1: Mechanisches Modell nach TERZAGHI

An dem Kammernmodell (Bild 1) lassen sich kurz die wichtigsten Begriffe erklären. Die Federn repräsentieren die Reaktionskräfte des Korngerüstes, das i.a. als elastisch angesehen wird. Die Kammern sind vollständig mit Wasser gefüllt. Der Druck in der Flüssigkeit und die Federspannung halten in jeder Zelle zu jedem Zeitpunkt der äußeren Last pro Flächeneinheit das Gleichgewicht. Diese Addition der Spannungen beider Phasen heißt Bilanzspannungsprinzip oder auch "effective stress principle". Der Druckunterschied zwischen den Zellen verursacht einen Strömungsprozess. Die Proportionalität zwischen dem Druckgradienten und der Strömungsgeschwindigkeit wird Darcysches Gesetz genannt. Der Proportionalitätsfaktor hat den Namen Permeabilität.

An Hand dieses Modells mit den obigen Annahmen stellt TERZAGHI für die flüssige Komponente die Kontinuitätsgleichung auf, die dann zu einer parabolischen Differentialgleichung für den Porenwasserüberdruck führt. Offenbar auf die Terzaghische Analogie zur Wärmeleitung |2| gestützt, glaubte RENDULIC (1936), |4|, |5| den Sprung vom Eindimensionalen ins Dreidimensionale schaffen zu können. Diese Verallgemeinerung ist heute unter dem Namen "pseudo-dreidimensionale" Theorie geläufig |18|. Obwohl diese Theorie weitgehend in der Praxis angewendet wird und oftmals für mehrdimensionale Probleme bessere Ergebnisse liefert als Terzaghis Gleichung, herrscht Unklarheit darüber, wie die äußere Last mit dem Anfangsdruckzustand in Zusammenhang zu bringen ist.

Die Theorie von TERZAGHI ist von FILLUNGER (1937), |3| heftig - zum Teil recht polemisch - kritisiert worden. FILLUNGER bemängelt die Analogie zur Wärmeleitung. Er betrachtet das Problem als Strömungsvorgang zweier Phasen fest und flüssig und fordert die Aufstellung der Eulerschen Bewegungsgleichungen. Um den Streit zwischen TERZAGHI und FILLUNGER schlichten zu helfen, stellte HEINRICH (1938), |7| für das eindimensionale Beispiel erstmals Gleichgewicht und Kontinuität für beide Phasen auf. Im Gegensatz zu TERZAGHI berücksichtigt HEINRICH noch die Trägheitskräfte, die aber - wie er selbst zeigt - praktisch vernachlässigt werden können.

Eine erste dreidimensionale Betrachtung im Sinne der Kontinuumsmechanik stammt von W. FLÜGGE (1934), |6|, der das Gleichgewicht für einen gesättigten, porösen Körper hinschrieb.

Die heute allgemein anerkannte dreidimensionale Konsolidationstheorie wurde von BIOT begründet (1941), |9|. Die Biotsche Modellvorstellung wird durch einen gesättigten Schwamm verdeutlicht, aus dessen Hohlräumen das Wasser infolge äußerer Kräfte entweicht. In dieser Arbeit wird das Gleichgewicht und die Kontinuitätsgleichung für das Gemisch aufgestellt. In einem Materialgesetz verknüpft er die Spannungen des Festkörpers und der Flüssigkeit mit den Verzerrungen des Festkörpers. Für die Durchströmung gilt wieder das Darcysche Filtergesetz. Als Endergebnis wird offenbar, daß im Gegensatz zu RENDULIC |4|, |5| nicht der Porenwasserüberdruck p sondern die Volumendilatation e des Gemisches dem Typ der Wärmeleitungsgleichung genügen muß, während p einer Bipotentialgleichung gehorcht. In weiteren Aufsätzen |10|, |11| werden Beispiele gerechnet.

Die Arbeit BIOTs war MANDEL (1953), |14| bekannt. Die Grundgleichungen begründet er nicht näher und übernimmt sie von BIOT. Ergänzend fügt er noch die Rand- und Anfangsbedingungen hinzu. Außerdem versucht er den physikalischen Vorgang detailiert zu erklären. Als Einziger überhaupt unterscheidet er zwischen "Anfangssetzung" und "Zeitsetzung". Anschließend rechnet er ein Beispiel vor. Hier beobachtet er, daß der Porenwasserüberdruck örtlich nach Aufbringen der äußeren Last für kurze Zeit noch weiter ansteigen kann. Zehn Jahre später stellte CRYER (1973), |20| an einer anderen Aufgabe ähnliches fest. Seitdem wird dieses Phänomen auch MANDEL-CRYER Effekt genannt.

In weiteren Publikationen (zeitlich nach MANDEL!) hat BIOT |12|, |13| versucht, seine Voraussetzungen zu verallgemeinern. Er manipuliert mit den Gleichungen für Gleichgewicht, mit dem Darcyschen Gesetz und dem von ihm selbst postulierten Stoffgesetzen. Eine Kontinuitätsgleichung im Sinne einer Massenbilanz wird nicht aufgestellt. Diese von BIOT später entworfene Theorie |12| ist auf Kritik gestoßen.

Aus diesem Grunde veröffentlichte HEINRICH, der sich schon in |7| zu diesem Thema geäußert hatte, mit DESOYER zusammen eine Reihe von Aufsätzen |15|, |16|, |17|. Wie einleitend in |17|, S. 225 betont, scheinen ihnen die Ansätze Biots "nicht aus den Grundlagen entwickelt". Die Phasen fest und flüssig werden getrennt bezüglich Gleichgewicht und Kontinuität untersucht. Das Korngerüst wird als elastisch angesehen, für die Diffusion gilt wieder "DARCY". Zwecks Vollständigkeit beachtet HEINRICH die Schwerkraft des Ge-

misches, die aber auf den Vorgang der Konsolidation keinen Einfluß ausübt. Auch versucht er zu erklären, unter welchen speziellen Annahmen die dreidimensionalen Gleichungen im Falle einer eindimensionalen Verzerrung in die Terzaghische Differentialgleichung überführt werden können. Zusätzlich findet man in|17| eine Beziehung zwischen Volumendilatation des Gemisches und Änderung des Porenvolumens.

Eine gänzlich neue Entwicklung initiierten TRUESDELL u. TOUPIN |21|. Hier wird ein Überblick über Diffusionstheorien gegeben. Ausführlicher stellt TRUESDELL (1962), |22| die mechanischen Gleichungen für diffundierende Medien auf und vergleicht sie mit schon vorhandenen Beziehungen wie sie z.B. in der kinetischen Gastheorie und in der Theorie für die Diffusion idealer Fluide von MAXWELL-STEPHAN vorkommen. Unter Mitnahme thermodynamischer Größen gaben GREEN und NAGHDI (1965), |24| eine Arbeit heraus, in der von einer Energiegleichung ausgehend das Gleichgewicht und die Kontinuität für jede Komponente abgeleitet werden. Für spezielle Fälle, wie flüssig-flüssig |24| oder fest-flüssig |25| werden Stoffgesetze gefordert, deren Koeffizienten mit Hilfe einer Entropieungleichung eingeschränkt werden. Theorien für Gemische aus mehreren Komponenten wurden u.a. von GREEN und NAGHDI (1967), |26| und von MÜLLER (1968), |28| vorgestellt.

Im Weiteren soll ein Gemisch für die Phasen fest und flüssig verfolgt werden.

3. Mechanik der Gemische

Im Abschnitt 3.1 werden die wichtigsten Grundgleichungen der Theorie der Gemische, wie sie von GREEN u.a. |24|, |25| begründet wurde, kurz wiederholt. Dies geschieht in der Absicht im anschließenden Abschnitt 3.2 die Aussagen der verschiedenen Konsolidationstheorien mit diesen Ergebnissen vergleichen zu können. Über die theoretischen Überlegungen von GREEN u.a. soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Zahlreiche andere Autoren, z.B. |28|, haben sich zu diesem Thema geäußert. Über begriffliche Vorstellungen und Herleitung der Grundgleichungen konnte keine völlige Übereinstimmung erzielt werden.

3.1 Bewegungs- und Kontinuitätsgleichungen nach GREEN und NAGHDI

Die Quintessenz ihrer Idee veröffentlichten GREEN und RIVLIN |23| für einen homogenen Körper. Sie besteht darin, zunächst eine Energiebilanz durchzuführen. Dann wird auf Grund einer Invarianzbedingung die Beziehung für die Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung ermittelt. GREEN u. RIVLIN stellen sich bewußt im Gegensatz zu der Auffassung der üblichen Kontinuumsmechanik, demgemäß die Axiome über Erhaltung der Energie und Erhaltung der Masse unabhängig voneinander existieren. Sie leiten die Kontinuitätsgleichung aus dem Energiepostulat ab.

3.1.1 Definitionen

Die von GREEN u.a. getroffenen Vereinbarungen und Bezeichnungen werden weitgehend übernommen. Das Gemisch bestehe aus den Medien s_1 und s_2, die beide gleichzeitig an jedem Ort des Gemisches vertreten sind. Als Koordinatensysteme werden Lagrangesche, d.h. materielle X_i bzw. Y_i, und Eulersche, d.h. ortsfeste x_i bzw. y_i, Koordinaten benutzt. Zu Beginn ($t=o$) fallen beide Systeme zusammen und können z.B. als kartesische Koordinaten angesehen werden. Zu einem beliebigen Zeitpunkt t besteht für die Phase s_1 der Zusammenhang

$$x_i = \phi_i(X_1, X_2, X_3, t) \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (1)$$

Für ein Partikel des Mediums s_2 gilt entsprechend

$$y_i = \psi_i(Y_1, Y_2, Y_3, t) \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (2)$$

Die Geschwindigkeiten für ein Teilchen aus s_1 bzw. s_2 sind bei festgehaltenen X_i bzw. Y_i durch

$$u_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad v_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \tag{3}$$

gegeben.

Die substantiellen (materiellen) Ableitungen $\frac{D}{Dt}^{(1)}$ und $\frac{D}{Dt}^{(2)}$ von Größen, die mit Eulerschen Koordinaten, d.h. in Abhängigkeit von x_i (und t) beschrieben werden, werden ähnlich wie in der Strömungsmechanik mit Gl. (3) durch

$$\frac{D}{Dt}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \frac{D}{Dt}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4}$$

erklärt. Hier wie im folgenden gelte die Einsteinsche Summationskonvention: Über gleichlautende Indizes wird entsprechend den drei Koordinaten summiert (i = 1, 2, 3).

Die Beschleunigungen werden aus den Geschwindigkeitsfeldern $u_i = u_i\,(x_1, x_2, x_3, t)$ und $v_i = v_i\,(x_1, x_2, x_3, t)$ mit Hilfe der Gl. (4) bestimmt:

$$f_i = \frac{D\,u_i}{Dt}^{(1)} \quad \text{und} \quad g_i = \frac{D\,v_i}{Dt}^{(2)} \tag{5}$$

Die Dichte der Massen s_1 und s_2 bezogen auf die Volumeneinheit des Gemisches sind ρ_1 und ρ_2. Die Dichte des Gemisches ist demnach

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \tag{6}$$

Mit Einführung einer mittleren Geschwindigkeit über die Impulsäquivalenz

$$\rho\, w_i = \rho_1\, u_i + \rho_2\, v_i \tag{7}$$

soll auch eine mittlere materielle Ableitung durch

$$\rho \frac{D}{Dt} = \rho_1 \frac{D}{Dt}^{(1)} + \rho_2 \frac{D}{Dt}^{(2)} \tag{8}$$

definiert werden.

Generell soll die Verabredung getroffen werden, daß sich Längen-, Flächen- und Volumeneinheiten stets auf das Gemisch beziehen.

Zum besseren Überblick der in diesem Abschnitt 3.1 verwendeten Begriffe soll die nachstehende Tabelle dienen. Unterschieden wird zwischen Größen, die sich nur auf eine der beiden Komponenten beziehen und solche, die charakteristisch für das Gemisch sind. Skalare Größen werden nicht, Vektoren einmal und Tensoren zweimal unterstrichen.

Tabelle 1: Definitionen des Abschnittes 3.1

Medium s_1	Medium s_2	Gemisch	Bezeichnung
t	t	t	Zeitkoordinate
x_1, x_2, x_3	x_1, x_2, x_3	x_1, x_2, x_3	Eulersche (ortsfeste) - hier kartesische - Koordinaten
X_1, X_2, X_3	Y_1, Y_2, Y_3		Lagrangesche (materielle) Koordinaten
ρ_1	ρ_2	ρ	spez. Dichten
$\underline{u} = \{u_i\}$	$\underline{v} = \{v_i\}$	$\underline{w} = \{w_i\}$	Geschwindigkeitsvektor
$\underline{f} = \{f_i\}$	$\underline{g} = \{g_i\}$		Beschleunigungsvektor
$\underline{b} = \{b_i\}$	$\underline{d} = \{d_i\}$		Oberflächenkraftvektor
$\underline{F} = \{F_i\}$	$\underline{G} = \{G_i\}$		Schwerkraftvektor
$\underline{\pi} = \{\pi_i\}$	$\underline{\pi} = \{\pi_i\}$		Diffusionswiderstandsvektor von s_1
$\underline{\underline{\sigma}} = \{\sigma_{ik}\}$	$\underline{\underline{\tau}} = \{\tau_{ik}$		Spannungstensor
$\underline{\underline{e}} = \{e_{ik}\}$	-		Verzerrungstensor
-	$\underline{\underline{f}} = \{f_{ik}\}$		Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
		A	freie Energie
		h	Wärmefluß
		r	Wärmeproduktion
		S	Entropie
		T	Temperatur
		U	innere Energie
		$\underline{n} = \{n_i\}$	äußerer Normalenvektor
		$\underline{q} = \{q_i\}$	Wärmeflußvektor

3.1.2 Energiebilanz (erster Hauptsatz)

GREEN u. NAGHDI fordern eine Energiebilanz für das Gemisch, bei der ebenso wie für einen homogenen Körper die Änderung der kinetischen und inneren Energie der Leistung der Volumen- und Oberflächenkräfte und des Wärmeflusses gleich sein muß. Wenn A die Oberfläche des Volumens V und n_k die k-te Komponente des äußeren Normalvektors bedeuten, so gilt zum Zeitpunkt t, siehe |24|

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(V)}\left[(\rho_1+\rho_2)\,U+\frac{1}{2}\,\rho_1 u_i u_i+\frac{1}{2}\,\rho_2 v_i v_i\right]dV+$$

$$\int_{(A)}\left[n_k(\rho_1 u_k+\rho_2 v_k)U+\frac{1}{2}\,\rho_1 n_k u_k u_i u_i+\frac{1}{2}\,\rho_2 n_k v_k v_i v_i\right]dA \qquad (9)$$

$$=\int_{(V)}(\rho r+\rho_1 F_i u_i+\rho_2 G_i v_i)\,dV+\int_{(A)}(b_i u_i+d_i v_i)\,dA-\int_{(A)}h\,dA$$

Die skalare Größe U ist die innere Energie pro Masseeinheit des Gemisches. Die Komponenten der massenbezogenen Schwerkraft von s_1 und s_2 sind F_i und G_i. Die Oberflächenkräfte werden mit b_i und d_i bezeichnet. Der Wärmefluß pro Flächen- und Zeiteinheit ist h(skalar), während die Wärmeproduktion im Innern pro Masseneinheit des Gemisches mit bezeichnet werden soll. Das zweite Integral auf der linken Seite wird mit Hilfe des Gaußschen Satzes umgeformt. So folgt aus (9)

$$\int_{(V)}\left[\rho\,\frac{DU}{Dt}+\rho_1 f_i u_i+\rho_2 g_i v_i\right]dV+\int_{(V)}\left[(m_1+m_2)\,U+\frac{1}{2}\,m_1 u_i u_i\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,m_2 v_i v_i\right]dV=\int_{(V)}\left[\rho r+\rho_1 F_i u_i+\rho_2 G_i v_i\right]dV+\int_{(A)}\left[b_i u_i+d_i v_i-h\right]dA \qquad (10)$$

Hier wurden die Abkürzungen

$$m_1=\frac{{}^{(1)}D\,\rho_1}{Dt}+u_{k,k}\,\rho_1=\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_1 u_k) \qquad (11)$$

und

$$m_2=\frac{{}^{(2)}D\,\rho_2}{Dt}+v_{k,k}\,\rho_2=\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_2 v_k) \qquad (12)$$

eingeführt.

Physikalische Deutung der Gln. (11) bzw. (12): Die Definitionen m_1 und m_2 stellen eine Massenproduktion je Volumeneinheit dar.

GREEN u. NAGHDI |24| überlagern der Bewegung dieses Gemisches eine konstante, beliebige Translationsgeschwindigkeit derart, daß die Größen ρ_1, ρ_2, U, (F_i-f_i), (G_i-g_i), b_i, d_i, r und h durch diese Starrkörpergeschwindigkeit unverändert bleiben. Es muß also u_i durch u_i+a_i und v_i durch v_i+a_i - mit a_i=konst. - in (10) ersetzt werden. Substraktion beider Gleichungen ergibt

$$a_i\int_{(V)}\left[\rho_1 f_i+\rho_2 g_i+u_i m_1+v_i m_2\right]dV+\frac{1}{2}\,a_i a_i\int_{(V)}(m_1+m_2)\,dV=$$

$$a_i\int_{(V)}\left[\rho_1 F_i+\rho_2 G_i\right]dV+a_i\int_{(A)}\left[b_i+d_i\right]dA \qquad (13)$$

Da a_i beliebig ist, folgt aus (13) zunächst

$$\int_{(V)} (m_1+m_2)\, dV = o \tag{14}$$

Der"Kontrollraum" V ist natürlich auch wieder willkürlich, d.h. aus (14) gewinnt man die Kontinuitätsgleichung

$$m_1 + m_2 = o \tag{15}$$

Treten zwischen den einzelnen Medien keine chemischen Reaktionen auf, so muß sogar

$$m_1 = o \tag{16a}$$

und

$$m_2 = o \tag{16b}$$

gelten. Abweichend von dem in |24| eingeschlagenen Weg, soll hier sofort und ohne Begründung vorausgesetzt werden, daß Spannungstensoren $\underline{\underline{\sigma}}$ und $\underline{\underline{\tau}}$ definiert werden können, die mit den Oberflächenkräften in der Beziehung

$$b_i = n_k\, \sigma_{ki} \tag{17}$$

$$d_i = n_k\, \tau_{ki} \tag{18}$$

stehen. Mit (17) und (18) folgt als zweites Ergebnis aus (13) die Bewegungsgleichung des Gemisches

$$\sigma_{ki,k} + \tau_{ki,k} + \rho_1 F_i + \rho_2 G_i = \rho_1 f_i + \rho_2 g_i + u_i m_1 + v_i m_2 \tag{19}$$

Die Energiegleichung (10) nimmt mit den Beziehungen (15), (17) und (18) die Gestalt an

$$\int_{(V)} \left[\rho r - \rho \frac{DU}{Dt}\right] dV - \int_{(A)} h\, dA + \int_{(V)} \left[\rho_1 (F_i - f_i)\, u_i - \frac{1}{2}\, u_i u_i m_1\right] dV$$

$$+ \int_{(V)} \left[\rho_2 (G_i - g_i) v_i - \frac{1}{2}\, v_i v_i m_2\right] dV + \int_{(V)} \left[\sigma_{ki,k}\, u_i + \sigma_{ki} u_{i,k} + \tau_{ki,k} + \tau_{ki} v_{i,k}\right] dV = 0 \tag{20}$$

Die kinetischen Energien $\frac{1}{2}\, u_i\, u_i\, m_1$ und $\frac{1}{2}\, v_i v_i m_2$ werden mit Hilfe der Bewegungsgleichung (19) ausgedrückt. Dann läßt sich Gl. (20) - durch Multiplikation der Gl. (19) mit $\frac{1}{2}\,(u_i + v_i)$ - weiter umformen

$$\int_{(V)} \left[\rho r - \rho\, \frac{DU}{Dt}\right] dV - \int_{(A)} h\, dA + \int_{(V)} \frac{1}{2}\left[(\rho_1 F_i - \rho_2 G_i)(u_i - v_i) - (\rho_1 f_i - \rho_2 g_i)(u_i - v_i)\right] dV$$

$$+ \int_{(V)} \left[\frac{1}{2}(\sigma_{ki} - \tau_{ki})_{,k} (u_i - v_i) + \sigma_{ki}\, u_{i,k} + \tau_{ki}\, v_{i,k}\right] dV = o \tag{21}$$

Wir betrachten ein Tetraeder, der von den Koordinatenebenen und einer schiefen Ebene eingeschlossen wird. Ist q_k der Wärmeflußvektor in x_k-Richtung, so gilt

$$h = n_k q_k \tag{22}$$

Ferner soll die Definition - siehe auch Abschnitt 3.2.5.3 -

$$\pi_i = \frac{1}{2}\left[(\sigma_{ki}-\tau_{ki})_{,k} + \rho_1(F_i-f_i) - \rho_2(G_i-g_i)\right] \tag{23}$$

eingeführt werden. Mit (22) und (23) nimmt (21) die Gestalt an

$$\rho r - q_{k,k} - \rho\frac{DU}{Dt} + \pi_i(u_i-v_i) + \sigma_{ki}\, u_{i,k} + \tau_{ki}\, v_{i,k} = o \tag{24}$$

Das ist der Energiesatz von GREEN u. NAGHDI |24|. Weiter zeigen sie, indem das Gemisch zusätzlich noch einer konstanten aber beliebigen Winkelgeschwindigkeit unterworfen wird, daß

$$\sigma_{ki} + \tau_{ki} = \sigma_{ik} + \tau_{ik} \tag{25}$$

gelten muß. Dazu ist erforderlich, daß in (24) die Verzerrungen $u_{i,j}$ und $v_{i,j}$ durch $u_{i,j}+\Omega_{ij}$ und $v_{i,j}+\Omega_{ij}$ ersetzt werden. Der Tensor Ω_{ij} ist willkürlich aber antimetrisch .

Mit Hilfe der Größe π_i kann aus (19) das Gleichgewicht für die einzelnen Phasen ermittelt werden. Für das Medium s_1 gilt

$$\sigma_{ki,k} + \rho_1(F_i-f_i) = \pi_i + \frac{1}{2} m_1 u_i + \frac{1}{2} m_2 v_i \tag{26}$$

und für s_2 entsprechend

$$\tau_{ki,k} + \rho_2(G_i-g_i) = -\pi_i + \frac{1}{2} m_1 u_i + \frac{1}{2} m_2 v_i \tag{27}$$

Bemerkung zur Definitionsgleichung (23):

GREEN u. NAGHDI |24| bezeichnen π_i als Diffusionswiderstand. Eine äquivalente Definition hat schon TRUESDELL |22| eingeführt. Er umreißt seine Größe, die hier dem Wert $-\pi_i$ aus Gl. (27) entspricht, mit der Bezeichnung "supply of momentrum vektor". Mit anderen Worten: π_i repräsentiert diejenigen Widerstandskräfte, die am Medium s_1 durch das Medium s_2 ausgeübt werden. Diese tauchen schon bei MAXWELL-CHAPMAN (siehe auch |22|) in der kinetischen Gastheorie auf und werden der Relativbewegung (u_i-v_i) proportional gesetzt.

3.1.3 Entropiebilanz (zweiter Hauptsatz)

Zur genauen Einschränkung der Koeffizienten der noch aufzustellenden Materialgleichungen postulieren GREEN u. NAGHDI |24| ferner eine Ungleichung für die Entropiezunahme. Die Temperatur T und die Entropie S sind Größen des Gemisches. Es wird die Annahme vertreten, daß

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)}(\rho_1+\rho_2)\,S\,dV+\int_{(A)}n_k(\rho_1 u_k+\rho_2 v_k)\,S\,dA-\int_{(v)}\rho\,\frac{r}{T}\,dV+\int_{(A)}\frac{h}{T}\,dA\geq 0 \tag{28}$$

gilt. Aus Gl. (28) erhält man mit Hilfe des Gaußschen Satzes die Ungleichung von Clausius-Duhem

$$\int_{(v)}\rho\,\frac{DS}{Dt}\,dV-\int_{(v)}\rho\,\frac{r}{T}\,dV+\int_{(A)}\frac{h}{T}\,dA\geq 0 \tag{29}$$

Das Oberflächenintegral wird mit der Beziehung (22) weiter umgeformt, so daß die Ungleichung (29) sich zu

$$\rho\,T\,\frac{DS}{Dt}-\rho r+q_{k,k}-\frac{q_k\,T,_k}{T}\geq 0 \tag{30}$$

ergibt.

Die Energiebilanz (24) wird mit der Änderung der Entropie (30) verknüpft. In diesem Zusammenhang wird die freie Energie A (nicht zu verwechseln mit dem Oberflächenelement dA!) eingeführt, deren Definition lautet

$$A = U - T\,S \tag{31}$$

Aus Gl. (31) wird durch materielle Differentiation die Relation

$$T\,\frac{DS}{Dt}-\frac{DU}{Dt}=-\left(S\,\frac{DT}{Dt}+\frac{DA}{Dt}\right) \tag{32}$$

gewonnen. Die Gln. (24) und (30) ergeben unter Berücksichtigung der Gl. (32)

$$-\rho\left(S\,\frac{DT}{Dt}+\frac{DA}{Dt}\right)+\pi_i(u_i-v_i)+\sigma_{ki}u_{i,k}+\tau_{ki}v_{i,k}-\frac{q_k T,_k}{T}\geq 0 \tag{33}$$

Folgende Verzerrungsgeschwindigkeiten werden definiert:

$$2\,d_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i} \tag{34}$$

$$2\,f_{ij}=v_{i,j}+v_{j,i} \tag{35}$$

und zusätzlich die Tensoren der Teilchendrehung

$$2\,\Gamma_{ij}=u_{i,j}-u_{j,i} \tag{36}$$

$$2\,\Lambda_{ij}=v_{i,j}-v_{j,i} \tag{37}$$

Unter Einbeziehung der Gln. (34) bis (37) erhält die Ungleichung (33) die von GREEN u. NAGHDI verwendete Form

$$- \rho\left(S \frac{DT}{Dt} - \frac{DA}{Dt}\right) + \pi_i (u_i - v_i) + \frac{1}{2} (\sigma_{ki} + \sigma_{ik})\, d_{ik}$$
$$+ \frac{1}{2} (\tau_{ki} + \tau_{ik})\, f_{ik} + \frac{1}{2} (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) (\Gamma_{ik} - \Lambda_{ik}) - \frac{q_k T,_k}{T} \geq o \qquad (38)$$

3.2 Theorien für gesättigte, elastisch, poröse Medien

In den nächsten Abschnitten werden die Bewegungs-, Kontinuitäts- und Materialgleichungen für ein Gemisch fest-flüssig aus den entsprechenden Aussagen des Abschnitts 3.1 abgeleitet. Anschließend werden die konventionellen Konsolidationstheorien von BIOT, MANDEL und HEINRICH u.a. kurz vorgestellt und diskutiert.

Einige Begriffe und Erläuterungen müssen neu eingeführt werden. Das relative Porenvolumen n ist durch

$$n = V_{Fl}/V \qquad (39)$$

definiert, wobei V_{Fl} das Flüssigkeitsvolumen bedeutet. Entsprechend bezeichnet V_k das Festkörpervolumen. Für die Dichten ρ_1 und ρ_2 gilt mit Gl. (39)

$$\rho_1 = (1-n)\rho_k \qquad (40)$$

und

$$\rho_2 = n\, \rho_{Fl} \qquad (41)$$

Die Dichten ρ_k und ρ_{Fl} sind jeweils auf die Volumeneinheit des Festkörpers bzw. der Flüssigkeit bezogen.

3.2.1 Voraussetzungen für ein Gemisch fest-flüssig

Der Diffusionsprozeß zwischen einem elastischen Festkörper und einer newtonschen Flüssigkeit soll auf folgenden Voraussetzungen beruhen:

1. Zum Zeitpunkt t=o findet keine Diffusion statt.
2. Der linear-elastische Festkörper sei isotrop.
3. Die sich einstellenden Verformungen und Geschwindigkeiten beider Phasen sind klein. Dies soll ebenso gelten für die entsprechenden örtlichen und zeitlichen partiellen Ableitungen dieser Größen.

4. Es treten keine chemischen Reaktionen auf.
5. Kein Eigenspannungszustand zwischen Festkörper und Flüssigkeit im unbelasteten Zustand.
6. Der Diffusionsprozeß läuft isotherm ab.
7. Beide Medien sind inkompressibel.
8. Quasistationäre Bewegung.

Die 8. Voraussetzung folgt unmittelbar aus dem 3. Punkt. Es wird die Auffassung vertreten, daß die Beschleunigungen auf den zeitlichen physikalischen Ablauf keinen großen Einfluß ausüben.
Aus Punkt 7. folgt

$$\rho_k = \text{konst. und } \rho_{Fl} = \text{konst.} \tag{42}$$

und Punkt 8. ist

$$g_i = f_i = 0 \tag{43}$$

gleichwertig.

3.2.2 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichung für den Festkörper lautet gemäß Gl. (26) unter Berücksichtigung der Annahmen 4. und 8. des Abschnitts 3.2.1

$$\sigma_{ki,k} + \rho_1 F_i = \pi_i \tag{44}$$

und die der Flüssigkeit gemäß Gl. (27)

$$\tau_{ki,k} + \rho_2 G_i = - \pi_i \tag{45}$$

Mit der Schwerkraft des Gemisches

$$\rho K_i = \rho_1 F_i + \rho_2 G_i \tag{46}$$

liefert die Summation der Gln. (44) und (45) die Bewegungsgleichung für das Gemisch

$$(\sigma_{ki} + \tau_{ki})_{,k} + \rho K_i = 0 \tag{47}$$

3.2.3 Kontinuitätsgleichungen

Die Beziehungen (16) mit den Definitionen (11) und (12) erhalten unter Berücksichtigung der Gln. (40) und (41) die Form

$$(1-n)\,\frac{\partial \rho_k}{\partial t} - \rho_k \frac{\partial n}{\partial t} + \left[(1-n)\rho_k\, u_i\right]_{,i} = 0 \tag{48}$$

und

$$n\,\frac{\partial \rho_{Fl}}{\partial t} + \rho_{Fl} \frac{\partial n}{\partial t} + \left[n\,\rho_{Fl}\, v_i\right]_{,i} = 0 \tag{49}$$

Die Voraussetzung 7., d.h. Gl. (42) vereinfacht die Beziehungen (48) und (49) zu der Kontinuitätsgleichung des Festkörpers

$$\left[(1-n)u_i\right]_{,i} = \frac{\partial n}{\partial t} \tag{50}$$

und zu derjenigen der Flüssigkeit

$$\left[n\, v_i\right]_{,i} = -\frac{\partial n}{\partial t} \tag{51}$$

Die Kontinuitätsgleichung des Gemisches ergibt sich zu

$$\left[u_i + n(v_i - u_i)\right]_{,i} = 0 \tag{52}$$

Mit der Einführung der Filtergeschwindigkeit

$$w_i := n\,(v_i - u_i) \tag{53}$$

erhält man aus Gl. (52)

$$(u_i + w_i)_{,i} = 0 \tag{54}$$

Die Definition (53) ist genau genommen keine Geschwindigkeit, sondern der Volumenstrom der Flüssigkeit relativ zum Festkörper pro Flächeneinheit in x_i-Richtung.

3.2.4 Stoffgleichungen nach GREEN u.a.

Die Voraussetzungen, die bei GREEN u. STEEL |25| für diesen Fall zu finden sind, stimmen mit den Punkten 1. bis 4. in Abschnitt 3.2.1 überein. In ihren Ansätzen für die Stoffgleichungen und die freie Energie A müssen die Materialkoeffizienten der Ungleichung (38) angepaßt werden.

Die Bezugssysteme X_i und x_i werden - wegen der vorausgesetzten kleinen Verformungen - beide angenähert als kartesisch angenommen. Die Verzerrungen des Festkörpers lauten

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial X_i}\right) , \tag{55}$$

wenn für die Verschiebungen

$$x_i = X_i + \xi_i \tag{56}$$

angesetzt worden ist. Die Verzerrungsgeschwindigkeiten der flüssigen Komponente sind durch

$$f_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial X_k} + \frac{\partial v_k}{\partial X_i}\right) \tag{57}$$

gegeben. Für die Dichte der Flüssigkeit mit der Dichteänderung η gilt

$$\rho_2 = \bar{\rho}_2 + \eta \tag{58}$$

Aus den Gln. (40) und (41) läßt sich für die Größe η

$$\eta = (n-n_o)\rho_{Fl} \tag{59}$$

ableiten. Die Dichte des Festkörpers wird mit

$$\rho_1 = \bar{\rho}_1 (1-e_{mm}) \tag{60}$$

angegeben.

Die von GREEN u. STEEL |25| postulierten Ansätze werden noch den Voraussetzungen 5. und 6. angepaßt. Dementsprechend werden folgende Ansätze für das Materialverhalten in linearer Form getroffen.

Für den Festkörper:

$$\sigma_{ik} = \alpha_4 \, e_{mm} \, \delta_{ik} + 2\alpha_5 e_{ik} + \alpha_8 \, \eta \, \delta_{ik} \tag{61}$$

Für die Flüssigkeit:

$$\tau_{ik} = - \left[\bar{\rho}_2(\alpha_6 \, \eta + \alpha_8 \, e_{mm})\right] \delta_{ik} + \lambda f_{rr} \, \delta_{ik} + 2\mu \, f_{ik} \tag{62}$$

Für den Diffusionswiderstand:

$$\pi_i = \alpha_o(u_i - v_i) \tag{63}$$

Auf die Bedeutung der konstanten Materialbeiwerte α_i soll erst später eingegangen werden.

3.2.5 Konsolidationstheorien

Gegenstand dieses Abschnitts sind die üblichen Konsolidationstheorien wie sie von BIOT, MANDEL und HEINRICH u. DESOYER entworfen wurden. Auf die "pseudo-dreidimensionale" Theorie von THERZAGHI-RENDULLIC wird nicht weiter eingegangen. Somit unterscheidet sich die folgende Untersuchung von den Arbeiten von CRYER (1963), |20| und SCHIFFMAN u.a. (1969), |18| in denen nur Vergleiche zwischen den Theorien von TERZAGHI und BIOT gezogen werden. Ferner wird kurz eine Arbeit von FLÜGGE, W. |6| erwähnt. Das Ziel besteht darin, erstens Modellvorstellungen der einzelnen Urheber wiederzugeben, zweitens die Voraussetzungen aufzuzählen, die sowohl direkt als auch indirekt - d.h. nicht erwähnt - die Autoren unterstellen und drittens gesondert zu zeigen, daß ihre Grundgleichungen als Spezialfälle in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 enthalten sind.

3.2.5.1 Modellvorstellungen

BIOT |9|, S. 155 entwickelt folgende Vorstellung wie der Vorgang der Konsolidation abläuft: Ein Schwamm sei vollständig mit Wasser gefüllt. Eine äußere Last bewirkt allmähliche Deformationen. Diese hängen von der Geschwindigkeit ab, mit der das Wasser aus den Poren gepreßt wird. In der Arbeit |12| taucht diese Idee nicht mehr auf.

Für MANDEL |14|, S. 288, ist der poröse Körper eine Tonschicht. Die Poren sieht er - ähnlich wie Terzaghi (Bild 1) - als Zellen an, die untereinander verbunden sind. Die Verzerrungen des Korngerüstes begleiten die Bewegungen des Wassers. MANDEL fügt einen wesentlichen Hinweis hinzu. Er differenziert zwischen Anfangssetzung (deformation immédiate) und der zeitlichen Setzung infolge Verringerung des Porenvolumens (déformation différée).

HEINRICH u. DESOYER |15|, |17| stellen sich das Korngerüst aus einzelnen Körnern zusammengesetzt vor. Sie sprechen von Korn-zu-Korn-Kräften und bezeichnen das Volumenelement des Gemisches als "Makromodell". Die äußere Last wird als "Störung" empfunden, d.h. ihre Theorie beinhaltet eine Störungsrechnung der Gestalt, daß sie außer den Größen, wie z.B. $\underline{g}$, $\underline{\underline{e}}$, $\underline{u}$, $\underline{v}$, usw., noch"kleine" Änderungen, wie $\underline{g}'$, $\underline{\underline{e}}'$, $\underline{u}'$, $\underline{v}'$, usw. einführen .

3.2.5.2 Voraussetzungen

Zwecks Kennzeichnung welcher Autor welche Annahmen einführt, werden folgende Abkürzungen vorgeschlagen:

1. BIOT |9| : B I
2. BIOT |12| : B II
3. MANDEL |14| : M
4. HEINRICH u. DESOYER |15|, |17| : H

In dem unten stehenden Katalog werden diejenigen Voraussetzungen, die von den Urhebern ausdrücklich erwähnt werden, mit + und diejenigen, die nicht hervorgehoben aber trotzdem benutzt werden, mit o gekennzeichnet. Die Reihenfolge stellt keine Prioritäten auf.

Tabelle 2: Voraussetzungen in den Konsolidationstheorien

Nr.	Voraussetzung	BI	BII	M	H
I	Annahme eines linearen Elastizitätsgesetzes	+	+	+	+
II	Gültigkeit des Darcyschen Filtergesetzes	+	+	+	+
III	Kleine Verformungen und Geschwindigkeiten	+	+	+	+
IV	Festkörper sei isotrop	+		+	+
V	Festkörper und Flüssigkeit seien inkompressibel	+		+	+
VI	Festkörper sei anisotrop, kompressibel		+		
VII	Flüssigkeit sei viskos, kompressibel		+		

Nr.	Voraussetzung	BI	BII	M	H
VIII	Materialgesetz sei reversibel	+	+	+	
IX	Materialgesetz sei irreversibel				+
X	Vollständige Sättigung		o	+	+
XI	Flüssigkeit kann Luftblasen enthalten	+			
XII	Quasistationäre Bewegung	o	o	o	+
XIII	Molekularkräfte zwischen Wasser und Boden werden nur durch Korrektur des Porenvolumens berücksichtigt				+
XIV	Eine Verdunstung der Flüssigkeit wird nicht berücksichtigt				+
XV	Keine Beachtung der Kapillarkräfte				+

Auf den ersten Blick wird der Eindruck vermittelt, daß je nach Verfasser verschiedene Einschränkungen gefordert werden. Die Voraussetzung X. wird auch von BIOT erfüllt, denn die Behauptung XI. gibt er wieder auf. Die Aufzählungen XIII, XIV und XV, die nur bei HEINRICH zu finden sind, sind für die hier entwickelten Theorien ohne Bedeutung.

3.2.5.3 Gleichgewichtsbeziehungen

Die Aussagen über das Gleichgewicht beziehen sich bei BIOT und MANDEL nur auf das Gemisch. HEINRICH u.a. |15| bilanziert getrennt für jede Komponente. Die Reaktionskraft zwischen Flüssigkeit und Festkörper bezeichnet HEINRICH als "Hautreibung".

Zunächst soll durch weitere Annahmen gezeigt werden, wie verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für das Gleichgewicht gefunden werden können. Die wichtigste Beschränkung sämtlicher Autoren ist in der Idealisierung der Flüssigkeit zu sehen, d.h. die Schubspannungen werden vernachlässigt. Das Fluid ist also reibungsfrei und inkompressibel. MANDEL hat versucht, die Schubspannungen der Größenordnung nach abzuschätzen. Er kommt zu dem Ergebnis, daß sie für die Praxis bedeutungslos sind |14|, S. 287. Somit vereinfachen sich die Komponenten des Spannungstensors $\underline{\underline{\tau}}$ zu

$$\tau_{ik} = \tau\, \delta_{ik} \tag{64}$$

Hierbei repräsentiert die skalare Größe τ den hydrostatischen Druck. Der wirkliche Druck p in den Poren - als Porenwasser(über)druck

positiv festgesetzt - steht mit dem hydrostatischen Druck τ mit Gl. (39) in der Beziehung

$$\tau = - n\, p \tag{65}$$

BIOT |12| postuliert das Gleichgewicht des Gemisches (47) unter Mitwirkung der Gl. (64). Er schreibt sofort

$$\sigma_{ki,k} = - \rho K_i \quad - \tau_{,i} \tag{66}$$

hin. In seiner Arbeit |9| und in der weiteren Ausführung von |12| wird die Schwerkraft außer Betracht gelassen. Dies hat MANDEL |14| auch getan. Somit erhält man aus Gl. (66)

$$\sigma_{ki,k} = \qquad - \tau_{,i} \tag{67}$$

Die Gleichgewichtsbeziehung gemäß HEINRICH u.a. |15|, |16|, |17| wird aus Gl. (47) mit Gl. (65) abgeleitet.

$$\sigma_{ki,k} = - \rho K_i + n\, p_{,i} + p\, n_{,i} \tag{68}$$

W. FLÜGGE |6|, der nur einen Gleichgewichtszustand für einen gesättigten, porösen Körper ohne Diffusionsprozeß im Auge hatte, impliziert noch bezüglich des relativen Porenvolumens die Bedingung: n = konst. Das bedeutet für Gl. (68)

$$\sigma_{ki,k} = - \rho K_i + n\, p_{,i} \tag{69}$$

Abschließend ein kurzer Kommentar zum Diffusionswiderstand:

In |15|, |16| führen HEINRICH u. DESOYER Gleichgewichtsbetrachtungen für jede Phase durch. Wie in |16|, S. 82 nachgelesen werden kann, gilt, daß die Summe Σ der von der Flüssigkeit auf den Festkörper ausgeübten Kräfte gleich

$$\sum = \underline{R} + p\, \nabla n \tag{70}$$

ist. Der Vektor $\underline{R}$ wird mit dem Ausdruck "Hautreibung" belegt und zu

$$\underline{R} = n\, (\nabla p - \gamma_{Fl}) \tag{71}$$

ermittelt.

Für das spez. Gewicht γ_{Fl} der Flüssigkeit gilt

$$n\,\gamma_{Fl} = n\,\rho_{Fl} g = \rho_2\, G_i, \quad (i=z) \tag{72}$$

d.h. die Komponenten des "Hautreibungsvektors" lauten mit (72)

$$R_i = n\, p_{,i} - \rho_2\, G_i \tag{73}$$

Einsetzen in (70) liefert für die Komponenten von Σ

$$S_i = (n\, p)_{,i} - \rho_2\, G_i \tag{74}$$

Gemäß (45) ist π_i die i-te Komponente der Reaktionskraft der Flüssigkeit, für die nach Gleichung (27) mit (16), (43) und (65) gelten muß

$$\pi_i = (np)_{,i} - \rho_2\, G_i \tag{75}$$

Der Vergleich zwischen (74) und (75) beweist, daß die physikalische Deutung der ursprünglich als Definition eingeführten Größe π_i zulässig ist.

3.2.5.4 Kontinuitätsgleichungen

BIOT stellt in |9 |eine Kontinuitätsgleichung auf, die in diesem Abschnitt noch hergeleitet wird. In seiner späteren Publikation |12| glaubt BIOT ohne direkte Massenbilanz auskommen zu können. MANDEL |14| präsentiert für das Gemisch sogleich eine Kombination aus Kontinuität und Darcyschen Gesetz. Lediglich HEINRICH |17| führt zwei Massenbilanzen durch. Bei ihm sind die Gl. (50) und (54) des Abschnitts 3.2.2 zu entdecken.

Die Kontinuitätsgleichung des Gemisches in der Form (54) befriedigt noch nicht. Es erscheint erstrebenswert, die Quellstärke als Funktion der Volumendilatation e_{ii} des Festkörpers angeben zu können. In Analogie zum homogenen Körper wird

$$e_{ii} := \xi_{i,i} \tag{76}$$

definiert. Anschaulich läßt sich Gl. (76) dahingehend interpretieren, daß sich der poröse Festkörper nach außen hin wie ein homo-

genes, kompressibles Medium verhält. Nach der Festlegung (3) gilt mit Gl. (55)

$$u_i = \dot{x}_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \Big| \; X_j = \text{konst.} \tag{77}$$

Einsetzen von Gl. (76) und (77) in Gl. (54) ergibt die in der Literatur häufig zitierte Kontinuitätsgleichung - die auch BIOT |9| angibt -

$$w_{i,i} = - \frac{\partial e_{ii}}{\partial t} \tag{78}$$

Auf der rechten Seite der Gl. (78) steht die Quellstärke des Gemisches, d.h. jedes Volumenelement kann physikalisch als Flüssigkeitsquelle(senke) interpretiert werden. Die Quellstärke selbst kann aber nur der Änderung des Porenvolumens entsprechen.

Dazu eine weitere Erklärung:
Die Verschiebungen eines porösen Körpers lassen sich in zwei Begriffe aufspalten. Die sich einstellenden elastischen Verzerrungen werden noch zusätzlich von Dehnungen infolge Verformung des Porenvolumens begleitet. Für die Volumendilatation e_{ii} kann demnach

$$e_{ii} = e^k_{ii} + e^P_{ii} \tag{79}$$

geschrieben werden. Hier beziehen sich e^k_{ii} auf den elastischen Anteil und e^P_{ii} auf die Dilatation der Poren. Eine Voraussetzung zur Herleitung der Gl. (78) war die Annahme, daß beide Medien inkompressibel sind. Daraus folgt, daß $e^k_{ii} = 0$ gilt. Somit entspricht die Volumendilatation des Gemisches einer Dilatation des Porenvolumens, d.h. Gl. (79) liefert

$$e_{ii} = e^P_{ii} \tag{80}$$

Die verbesserte Darstellung der Kontinuitätsgleichung - im Einklang mit der physikalischen Interpretation der Quellstärke - erscheint in der Gestalt

$$w_{i,i} = \frac{\partial e^P_{ii}}{\partial t} \tag{81}$$

Der Vollständigkeit halber soll erwähnt werden, daß Rendulic |5| noch eine andere Variante der Kontinuitätsgleichung anbietet. An einer von ihm entworfenen Modellvorstellung leitet er

$$w_{i,i} = - \frac{\partial n}{\partial t} \tag{82}$$

her. Diese Form erhält man aus (51) und (53), wenn die Festkörpergeschwindigkeit u_i Null gesetzt wird.

3.2.5.5 Abhängigkeit des relativen Porenvolumens n von der Volumendilatation e^P_{ii}

Obwohl die Funktion $n = n(e^P_{ii})$ in den nächsten Abschnitten dieses Kapitels nicht benötigt wird, soll eine derartige Relation hergestellt werden, weil diese in der Literatur oft "vereinfacht" wird.

Aus Gl. (50) erhält man mit der Festlegung (4)

$$u_{i,i} = \frac{1}{1-n} \overset{(1)}{\frac{Dn}{Dt}} \tag{83}$$

Mit den Beziehungen (3) und (56) wird die linke Seite von Gl. (83) mit $\xi_i = \xi_i (X_j, t)$ durch

$$u_{i,i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j}\right) \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \tag{83a}$$

ausgedrückt. In den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.5.2 werden kleine Verzerrungen in den Voraussetzungen angenommen. Das hat zur Folge, daß näherungsweise für die Inverse $\partial X_j/\partial x_i$ von $\partial x_i/\partial X_j = \delta_{ij} + \partial \xi_i/\partial X_j$ - siehe Gl. (56) -

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \delta_{ji} - \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} + \ldots \approx \delta_{ji} \tag{83b}$$

gilt. Im Sinne der Linearisierung der Beziehung (83a) ist

$$u_{i,i} \approx \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j}\right) \delta_{ji} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_i}\right) = \dot{e}_{ii} \tag{84}$$

anzusetzen, d.h. mit der materiellen Ableitung $(\,)^{\cdot}$ folgt aus Gl. (83)

$$\dot{e}_{ii} = \frac{1}{1-n} \dot{n} \tag{85}$$

Die Integration der Gl. (85) liefert mit Gl. (80)

$$e^P_{ii} = - \ln \left(\frac{1-n}{1-n_o}\right) \tag{86}$$

Mit der Reihenentwicklung von $\ln (1+x) = x - x^2/2 + \ldots$ bieten sich zwei Versionen von Gl. (86) an, da nach dem ersten Glied abgebrochen wird. HEINRICH u. DESOYER |17| leiten aus Gl. (86),

$$e^P_{ii} = \frac{n-n_o}{1-n_o} \tag{87}$$

ab. Die Gl. (87) entspricht der von GREEN u.a. angegebenen Beziehung (60).

Eine zweite Näherung von (83) lautet

$$e_{ii}^{P} = \frac{n-n_o}{1-n} \quad , \tag{88}$$

die physikalischen Verhältnissen etwas gerechter wird, wie folgende Überlegung zeigt. Man stelle sich einen porösen Würfel mit den Ausgangsvolumen V_o vor, der zum Zeitpunkt t das Volumen V hat. Es gilt offenbar

$$V = V_k + V_{Fl} \tag{89}$$

und

$$V_k = \text{konst.}, \tag{90}$$

da Dichte und Masse des Festkörpers konstant bleiben. Auf Grund der angenommenen kleinen Verzerrungen gilt mit Gl. (80) die Beziehung

$$V = (1 + e_{ii}^{P})\, V_o \tag{91}$$

Mit dem relativen Porenvolumen n folgt

$$n = \frac{V_{Fl}}{V} = 1 - \frac{V_k}{V} \tag{92}$$

Mit (89), (90) und (91) wird aus (92)

$$n = 1 - \frac{1-n_o}{1+e_{ii}^{P}} \tag{93}$$

oder

$$e_{ii}^{P} = \frac{n-n_o}{1-n} \tag{94}$$

Der Vergleich von Gl. (94) mit Gl. (88) legt den Schluß nahe, daß Gl. (88) gegenüber dem Ausdruck (87) als Näherungswert der Beziehung (84) vorzuziehen ist.

Eine andere Berechtigung die Formel (88) zu benutzen, folgt aus der Betrachtung des Maximalwertes von e_{ii}^{P}. Zu diesem Zweck wird aus den Gln. (90) und (91)

$$e_{ii}^{P} = \frac{V_{Fl} - V_{Fl,o}}{V_o} = \frac{\Delta V_{Fl}}{V_o} \tag{95}$$

abgeleitet. Der größte Wert von e_{ii}^{P} wird dann erreicht, wenn das Porenvolumen auf Null reduziert worden ist. Somit muß

$$e^{P}_{ii}\Big|_{Max} = - \frac{V_{Fl,o}}{V_o} = - n_o \qquad (96)$$

gelten. Der Beziehung (96) kann nur (88) bzw. (94) und nicht (87) genügen!

Eine kritische Bemerkung zu der Arbeit von HEINRICH u. DESOYER |17| sei hier gestattet. In |17| wird der Gl. (87) der Vorzug gegeben, weil der Zusammenhang zwischen e^{P}_{ii} und n linear ist. Das hat zur Folge, daß die erneute partielle zeitliche Differentiation der Gl. (87) die Beziehung

$$\frac{\partial e^{P}_{ii}}{\partial t} = \frac{1}{1-n_o} \frac{\partial n}{\partial t} \qquad (97)$$

liefert, die aber offensichtlich im Widerspruch zu Gl. (84) steht. Ohne die Beziehung (97) hätte HEINRICH |17| nicht die schon von BIOT und MANDEL ermittelten Differentialgleichungen für die Größen e^{P}_{ii} und p bestätigen können.

3.2.6 Materialgesetze

3.2.6.1 DARCysches Filtergesetz

Das DARCYsche Filtergesetz taucht ausnahmslos bei allen Verfassern der Konsolidationstheorien und der Grundwasserströmungen auf. Es ist als Materialgesetz für den Diffusionswiderstand zu interpretieren, auch wenn BIOT fälschlich den Ausdruck "equation of flow" benutzt, |12|, S. 184.

Mit den Gln. (16), (27) und (51) folgt

$$\pi_i = - \tau_{ki,k} - \rho_2 G_i \qquad (98)$$

Der Ansatz (46) und die Filtergeschwindigkeit (62) liefern

$$w_i = - \frac{n}{\alpha_o} \pi_i$$

Kombination der Gln. (98) und (99) ergibt

$$w_i = \frac{n}{\alpha_o} (\tau_{ki,k} + \rho_2 G_i) \qquad (100)$$

Der Proportionalitätsfaktor α_o wird mit der Permeabilität k in Verbindung gebracht. Es wird definiert

$$k := \frac{n}{\alpha_o} \tag{101}$$

Oft wird die Permeabilität k auch auf die Viskosität oder auf das spez. Gewicht der Flüssigkeit bezogen.

Mit der Deutung (101) bekommt man eine verallgemeinerte Form des DARCYschen Gesetzes. Der Zusammenhang zwischen dem "Kraftgradienten" und der Filtergeschwindigkeit wird i.a. nicht durch eine Konstante k sondern durch einen Materialtensor k_{ij} vermittelt. In diesem Sinne gilt dann

$$w_i = k_{ij} \, (\tau_{jk,k} + \rho_2 \, G_j) \tag{102}$$

Wird die Flüssigkeit wieder idealisiert und für die Durchlässigkeit Isotropie angenommen, so erscheint das DARCYsche Gesetz in der Gestalt

$$w_i = k \, (\tau_{,i} + \rho_2 \, G_i) \tag{103}$$

Wie aus der Beziehung (63) hervorgeht, ist das DARCYsche Filtergesetz der einfachste Ansatz für den Diffusionswiderstand. Er ist schon von MAXWELL (1860), |22| vorgeschlagen worden. Mit dem Faktor k sollen alle möglichen Strömungsverluste erfaßt werden. Der Anwendungsbereich von (103) beschränkt sich auf Schleichströmungen.

3.2.6.2 Deutung der Stoffbeiwerte für Festkörper und Flüssigkeit

Wie aus dem Abschnitt 3.2.5.3 über Gleichgewichtsbeziehungen hervorgeht, wird generell in den Konsolidationstheorien die Flüssigkeit als ideal betrachtet. Somit braucht wie die Strömungsmechanik lehrt, für diese Komponente des Gemisches kein Materialgesetz gefordert zu werden. Der Spannungstensor entartet zum Kugeltensor.

Dem Festkörper werden i.a. linear-elastische, isotrope Eigenschaften - siehe BI, M, H - zugeschrieben. Wie aus der Festigkeitslehre bekannt, gilt der Zusammenhang

$$\sigma_{ik} = \alpha_4 \, e_{mm} \, \delta_{ik} + 2\alpha_5 \, e_{ik} \tag{104}$$

zwischen den Komponenten des Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ und des Verzerrungstensors $\underline{\underline{e}}$. Die α-Werte in Gl. (106) werden dem porösen Körper zugeordnet und entsprechen den Lameschen Konstanten. Es gilt

$$\alpha_4 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{105}$$

und

$$\alpha_5 = G \tag{106}$$

In seiner Arbeit |12| macht BIOT eine Ausnahme. Ganz allgemein postuliert er ein Materialgesetz, bei dem sämtliche Spannungen, d.h. σ_{ik} und σ, in lineare Abhängigkeit mit den Verzerrungen e_{ik} und der Volumendilatation ε der Flüssigkeit gebracht werden. BIOTs Elastizitätsmatrix ist symmetrisch und besitzt zunächst 28 verschiedene Elemente. In dieser Formulierung kann der Festkörper anisotrop sein. Im Fall der Isotropie glaubt BIOT mit vier elastischen Konstanten auskommen zu können (siehe auch DERSKI |19|).

Die Behandlung der Materialgleichungen in der obigen Art bedarf einiger Hinweise. MANDEL und HEINRICH behaupten ihre Größen α_4 und α_5 charakterisieren allein das Gemisch. MANDEL betont jedoch, daß ein Ansatz gemäß Gl. (104) für das Korngerüst unbefriedigend ist und diesbezüglich Verbesserungen vorgenommen werden müssen. BIOT und GREEN geben allgemeinere Materialgesetze an. Ihnen allen ist gemeinsam, daß eine nähere Bestimmung unterbleibt.

Die von GREEN u.a. angegebene Stoffgleichung für die Festkörper lautet - siehe Gl. (61) -

$$\sigma_{ij} = \alpha_4 \, e_{mm} \, \delta_{ij} + 2\alpha_5 \, e_{ij} + \alpha_8 \eta \, \delta_{ij} \tag{107}$$

Es wird jetzt überprüft, wie die Dichteänderung η mit der Volumendilatation e_{mm} in Verbindung gebracht werden kann und welche Änderungen sich für Gl. (107) ergeben.

Mit Hilfe der Gl. (59) erscheint Gl. (107) in der Gestalt

$$\sigma_{ij} = \alpha_4 \, e_{mm} \, \delta_{ij} + 2\alpha_5 \, e_{ij} + \alpha_8 (n-n_o) \, \rho_{Fl} \, \delta_{ij} \tag{108}$$

Als wertvoll erweisen sich die Beziehungen des Abschnitts 3.2.5.5. Es folgt aus Gl. (94)

$$\sigma_{ij} = \alpha_4 \, e_{mm} \, \delta_{ij} + 2\alpha_5 \, e_{ij} + \alpha_8 \rho_{Fl}(1-n_o) e^P_{kk} \, \delta_{ij} \qquad (109)$$

Gl. (109) wird mit Gl. (93) weiter umgeformt

$$\sigma_{ij} = \alpha_4 \, e_{mm} \, \delta_{ij} + 2\alpha_5 \, e_{ij} + \alpha_8 \rho_{Fl}(1-n_o) \frac{e^P_{kk}}{1+e^P_{ll}} \, \delta_{ij} \qquad (110)$$

Unter der Annahme, daß

$$e^P_{ii} << 1 \qquad (111)$$

zutrifft und mit der Abkürzung

$$\bar{\alpha}_8 = \alpha_8 \, \rho_{Fl}(1-n_o) \qquad (112)$$

wird aus Gl. (110)

$$\sigma_{ij} = \alpha_4 \, e_{mm} \, \delta_{ij} + 2\alpha_5 \, e_{ij} + \bar{\alpha}_8 \, e^P_{kk} \, \delta_{ij} \qquad (113)$$

gewonnen.

Wie den Voraussetzungen der Abschnitte 3.2.1 und 3.2.5.2 zu entnehmen ist, ist ausschließlich der Fall eines inkompressiblen Festkörpers von Interesse. Dann kann aber die Beziehung (80) herangezogen werden. Unter diesem Blickpunkt erhält man die modifizierte Form der von GREEN u. STEEL postulierten Materialgleichung für einen elastischen, porösen Körper. Es ergibt sich

$$\sigma_{ij} = (\alpha_4 + \bar{\alpha}_8) \, e_{mm} \, \delta_{ij} + 2\alpha_5 \, e_{ij} \qquad (114)$$

als Spezialfall der Form

$$\sigma_{ij} = \bar{c}_{ijkl} \, e_{kl} \qquad (115)$$

wobei der Materialtensor $\{c_{ijkl}\}$ in ij und kl symmetrisch ist.

3.2.7 Formulierung der Rand- und Anfangsbedingungen

Der Rand wird in verschiedene Teilbereiche aufgeteilt. Für jede Komponente werden Spannungsränder und Verschiebungsränder festgelegt, die sich nicht überlagern sollen.

Für Verschiebungsrandbedingungen gilt

$$\xi_i = \bar{\xi}_i \quad \text{auf} \quad S_1 \qquad (116)$$

Auf denjenigen Abschnitten, auf denen Spannungen vorgegeben sind, müssen die Gln. (17) und (18) gelten:

$$b_i = n_k \, \sigma_{ki} \quad \text{auf} \quad S_2 \tag{117}$$

und

$$d_i = n_k \, \tau_{ki} \quad \text{auf} \quad S_3 \tag{118}$$

Ist der Volumenstrom Q begrenzt, so bedeutet dies

$$Q = \bar{Q} = n_i \, \bar{w}_i \quad \text{auf} \quad S_4 \tag{119}$$

Für die Anfangsbedingung kann aus physikalischer Sicht die Forderung erhoben werden, daß kurz nach der Lastaufbringung im gesamten Bereich noch keine Volumendilatation eingetreten ist, da noch keine Flüssigkeitsverluste zu verzeichnen sind. Für die Integration der Kontinuitätsgleichung (75) resultiert aus dieser Annahme

$$e_{ii} + \int_o^t w_{i,i} \, dt = \bar{e}_{ii} \tag{120}$$

Für den Zeitpunkt t = o wird (120) zu

$$e_{ii} = \bar{e}_{ii} = 0 \tag{121}$$

reduziert.

3.2.8 Vergleich und Kritik der Konsolidationstheorien

Die Grundgleichungen, die sich aus der Mechanik der Gemische für den Fall eines gesättigten, elastisch, porösen Körper ergeben haben, basieren auf einer breiteren theoretischen Grundlage als diejenigen Beziehungen, die in den Konsolidationstheorien von BIOT, MANDEL und HEINRICH zu finden sind.

Die Theorie von BIOT scheint mehr intuitiv entwickelt worden zu sein. Seine Modellvorstellung ist verfeinert verglichen mit der von TERZAGHI. In seiner ersten Arbeit |9| stimmen Voraussetzungen und Annahmen mit den erzeugten Ergebnissen noch überein. Von seiner nächsten Arbeit |12| läßt sich das nicht mehr behaupten. Wie aus Gleichgewicht und Filtergesetz zweifelsfrei hervorgeht, ist bei ihm auch die Flüssigkeit ideal, d.h. seine Verallgemeinerung X. entfällt. Die Kompressibilität des Festkörpers bleibt ungeklärt, da BIOT in |12| keine Massenbilanzen durchführt.

MANDEL zitiert BIOT. Er entwickelt keine Theorie, die mit weniger Einschränkungen auskommt. Sein Verdienst ist darin zu sehen, daß er eine klare Beschreibung des physikalischen Vorgangs vermittelt. Aus seinen Überlegungen resultieren erstens eine Formulierung der Rand- und Anfangsbedingungen und zweitens die Trennung zwischen Anfangszustand und dem weiteren zeitlichen Ablauf. Rand- und Anfangsbedingungen tauchen bei BIOT und HEINRICH nur in konkreten Beispielen auf. Außerdem ist er sich der Unzulänglichkeit eines in Analogie zum homogenen elastischen Körper formulierten Materialgesetzes bewußt.

Die Veröffentlichungen von HEINRICH u. DESOYER stellen in theoretischer Hinsicht keineswegs einen Fortschritt dar. Ein Teil ihrer Voraussetzungen ist für die Theorie überflüssig. Die Gleichungen bezüglich Gleichgewicht und Kontinuität beziehen sich auf jede Komponente. Das ist ein Vorteil gegenüber BIOT und MANDEL. Die endgültigen Differentialgleichungen für Porenwasserdruck und Volumendilatation stehen im Einklang mit denen der anderen Autoren. Ihre Rechentechnik jedoch ist unvollkommen, wie der Abschnitt 3.2.5.5 offenbart hat.

Ein großer Nachteil sämtlicher Konsolidationstheorien besteht darin, daß für die Differentialgleichung des Porenwasserdrucks p der Anfangsdruckzustand p_o in Abhängigkeit von den Randbedingungen beider Komponenten nicht spezifiziert werden kann. Mathematisch gesehen bleibt die Lösung dieses Problems somit unbestimmt. In der "pseudo-dreidimensionalen" Theorie von TERZAGHI-RENDULIC sind zahlreiche Abhilfen vorgeschlagen worden. Eine oft praktizierte Methode |20| besteht darin, den Anfangsdruckzustand p_o der vertikalen Normalspannung gleichzusetzen, die aus der Theorie von BOUSSINESG für den elastischen Halbraum errechnet werden kann.

4. Zusammenfassung

Nach einer kurzen und nur auszugsweise wiedergegebenen Darstellung der Theorie der Gemische, wie sie von GREEN u.a. begründet worden ist, konnten die speziellen Theorien für elastisch, poröse Medien daraus abgeleitet werden. Die Grundgleichungen und deren Ergebnisse wurden rein analytisch ermittelt. Im Gegensatz dazu benutzen die Urheber der Konsolidationstheorien immer bestimmte Modellvorstellungen. Ohne die prinzipiellen Aussagen letzterer in Frage zu stellen, wurden einige Besonderheiten besser herausgearbeitet.

Dies trifft für einen Überblick über die erwähnten Voraussetzungen zu. Die verschiedenen Versionen von Gleichgewichts- und Kontinuitätsgleichungen wurden aufgezählt. Das oft in der Literatur zitierte DARCYsche Filtergesetz kann aus einem Ansatz für den Diffusionswiderstand gewonnen werden. Eine Korrektur erfolgte für eine funktionelle Abhängigkeit zwischen den Größen n und e^{P}_{ii}. Auf der Basis der in diesem Kapitel dargestellten Grundgleichungen können numerische Rechnungen aufgebaut werden.

5. Bezeichnungen

E	= Elastizitätsmodul
g	= Erdbeschleunigung
G	= Schubmodul
k	= Permeabilität, Gl. (101)
$\underline{K} = \{K_i\}$	= Schwerkraftvektor, Gl. (46)
$\underline{\underline{k}} = \{k_{ij}\}$	= Materialtensor der Permeabilität, Gl. (102)
n	= relatives Porenvolumen, Gl. (39)
p	= Porenwasser(über)druck, Gl. (65)
Q	= Volumenstrom, Gl. (119)
V	= Kontrollvolumen, Definitionsgebiet
V_{Fl}	= Flüssigkeitsvolumen
V_k	= Festkörpervolumen
$\underline{w} = \{w_i\}$	= Filtergeschwindigkeit, Gl. (53)
α_o, α_4, α_5, α_6, α_8	= Materialkoeffizienten
γ_{Fl}	= spez. Gewicht der Flüssigkeit
η	= Dichteänderung, Gl. (59)
λ	= Viskosität, Gl. (62)
μ	= Volumenviskosität, Gl. (62)
ρ_k, ρ_{Fl}	= spez. Dichten
τ	= hydrostatischer Druck, Gl. (64)

6. Literaturverzeichnis

|1| Terzaghi, K. — Erdbaumechanik
Leipzig u. Wien: Franz Deuticke, 1925.

|2| Terzaghi, K. u. Fröhlich, O.K. — Theorie der Setzung von Tonschichten,
Leipzig u. Wien: Franz Deuticke, 1936.

|3| Fillunger, P. — Erdbaumechanik?
Im Selbstverlag des Verfassers, 1937.

|4| Rendulic, L. — Der hydrodynamische Spannungsausgleich in zentral entwässerten Tonzylindern,
Wasserwirtschaft u. Techn., 2.(1935) 253, 269.

|5| Rendulic, L. — Porenziffer u. Porenwasserdruck in Tonen,
DER BAUINGENIEUR, 17(1936),51/52,559-564.

|6| Flügge, W. — Die Spannungen in durchströmten porösen Körpern,
4th Int.Congr.Appl.Mech., Cambridge, Engl., 1934, 3o-31.

|7| Heinrich, G. — Wissenschaftliche Grundlagen der Theorie der Setzung von Tonschichten,
Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 33(1938), 1/2, 5-1o.

|8| Heinrich, G. — Theorie eines mechanischen Modells zur Veranschaulichung der Setzung von Tonschichten, Deutsche Wasserwirtschaft, 11(1938) , 317

|9| Biot, M.A. — General Theory of Three-Dimensional Consolidation,
J.Appl.Phy., Vol.12, 1941, 155-164.

|1O| Biot, M.A. — Consolidation Settlement under a Rectangular Load Distribution,
J.Appl. Phys., Vol.12, 1941, 426-43o.

|11| Biot, M.A. — Consolidation Settlement of a Soil with an Impervious Top Surface, J.Appl.Phys., Vol.12, 1941, 578-587.

|12| Biot, M.A. — Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid, J. Appl. Phys., Vol. 26, 1955, 182-185.

|13| Biot, M.A. — Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid, J. Appl. Phys., Vol. 27, 1956, 459-467.

|14| Mandel, J. — Consolidation Des Sols (Étude Mathematique), Geotechnique, Vol. 3, 1953, 287-299.

|15| Heinrich, G. und Desoyer, K. — Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen, Ingenieur-Archiv, 23(1955), 73-84.

|16| Heinrich, G. und Desoyer, K. — siehe |15|, II. Mitteilung, Ingenieur-Archiv, 24(1956), 81-84.

|17| Heinrich, G. und Desoyer, K. — Theorie dreidimensionaler Setzungsvorgänge in Tonschichten, Ingenieur-Archiv, 30(1961), 225-253.

|18| Schiffman , R.L. u.a. — An Analysis of Consolidation Theories, ASCE, SM 1, 1969, 289-312.

|19| Derski, W. — Constitutive relations in the consolidation theory, Arch.Mech., 23 (1971), 919-926.

|20| Cryer, C.W. — A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi, Quart.J.Mech.Appl.Math., Vol.16 (1963), 401-412.

|21| Truesdell, C. u. Toupin, R.A. — Handbuch der Physik, Band II/1 Berlin, Springer, 1960

|22| Truesdell, C. — Mechanical Basis of Diffusion, J. Chem.Phy., Vol. 37(1962), 2336-2344.

[23]	Green, A.E. u. Rivlin, R.S.	On Cauchy's Equations of Motion, Z.A.M.P., Vol.15, 1964, 29o-292.
[24]	Green, A.G. u. Naghdi, P.M.	A Dynamical Theory of Interacting Continua, Int.J.Engng.Sci, Vol.3, 1965, 231-241.
[25]	Green, A.E. und Steel, R.E.	Constitutive Equations for Interacting Continua, Int.J.Engng. Sci., Vol. 4, 1966, 483-5oo.
[26]	Green, A.E. und Naghdi, P.M.	A Theory of Mixtures, Arch. Rational Mech.Anal., Vol. 24, 1967, 243-263.
[27]	Solecki, R.	The Place of the Biot Porosity Theory in Continuum Mechanics (in polnisch), Rozprawy Inzynierskie 3, 16 (1968), 313-317.
[28]	Müller, I.	A Thermodynamic Theory of Mixtures of Fluids, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 28, 1968.

IV. Kapitel

Prinzipe der virtuellen Arbeiten für Gemische

1. Vorbemerkungen

In den bevorstehenden Abschnitten wird das Prinzip der virtuellen Arbeiten (P.d.v.A.) auf Gemische in Analogie zum homogenen Körper ausgedehnt. Dies geschieht in der gleichen Weise wie in der Elastomechanik.

Zahlreiche Variationsprinzipe für statische und dynamische Fälle in der Kontinuumsmechanik können z.B. in |1|, |2|, |3| und |5| nachgelesen werden. Sie passen alle in den traditionellen Rahmen des Hamiltonschen Prinzips, demgemäß sich der wirkliche Zustand von allen anderen "Vergleichbaren" dadurch auszeichnet, daß er dem Funktional einen stationären Wert erteilt. Unter "Zustand" wird ein Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungsfeld verstanden, der bestimmte Feld- und Randgleichungen bezüglich eines räumlichen Definitionsgebietes in einem festgelegten Zeitintervall erfüllt. Bei dynamischen Beanspruchungen müssen somit die Anfangsbedingungen, wie Verschiebungen und Geschwindigkeiten berücksichtigt werden |3|. Die Materialgleichungen werden i.a. als Nebenbedingungen betrachtet.

Ist der gesuchte Zustand z.B. ein Verschiebungsverlauf, wird ein erheblicher Nachteil des Hamiltonschen Prinzips offenkundig. Als Information müssen nicht nur die Verschiebungen am Anfang des Prozesses sondern auch noch diejenigen zu einem späteren Zeitpunkt zur Verfügung stehen. Die physikalische Anfangsbedingung des Geschwindigkeitsverlaufes wird nicht genutzt. Somit eignet sich "Hamilton" nur zur Bewältigung reiner Randwertprobleme.

Am konkreten Beispiel der Wellengleichung hat GURTIN |4| vorgeführt, daß erstens das Hamiltonsche Prinzip ungeeignet ist und zweitens, wie vermöge Integration die Anfangsbedingungen mit eingearbeitet werden, so daß für die restliche modifizierte Randwertaufgabe ein Funktional angegeben werden kann.

Der von GURTIN |3|, |4| vorgezeichnete Weg ist später von SANDHU (1969) u.a. für den Fall der Diffusion eines festen mit einem flüssigen Medium beschritten worden. SANDHU u. WILSON |6| geben zum ersten Mal ein Variationsprinzip für ein Gemisch an, das in der Konsolidation seine numerische Anwendung findet. In zwei Veröffentlichungen |7|, |8| wird eine breitere theoretische Grundlage angestrebt.

Im 2. Abschnitt dieses Kapitels werden Prinzipe der virtuellen Arbeiten für ein Gemisch aus zwei Komponenten aufgestellt. Als Ausgangsgleichungen dienen die statischen Beziehungen im Feld und auf dem Rand. Ebenso werden die Kontinuitätsgleichungen für beide Medien herangezogen. Die Einarbeitung des Faltungsproduktes entspricht physikalisch einer zeitlichen Integration über die virtuellen Arbeiten. In Anlehnung an GURTIN wird eine Anfangsbedingung berücksichtigt. Im anschließenden 3. Abschnitt wird das Variationsprinzip von SANDHU untersucht. Die Rechnungen erweisen, daß im allgemeinen Fall dem von SANDHU postulierten Funktional keine stationären Eigenschaften zugeschrieben werden können.

2. Prinzipe der virtuellen Arbeiten für Gemische

Die in den Abschnitten 2.2 und 2.3 aufgestellten Prinzipe der virtuellen Arbeiten unterscheiden sich von den P.d.v.A. der Elastostatik in einer wichtigen Beziehung. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen und das Prinzip der virtuellen Kräfte sind in der Statik ineinander überführbar. Das hängt davon ab, welche Grundgleichungen, d.h. statische und geometrische Aussagen, als Eulersche Differentialgleichungen bzw. als Nebenbedingungen aufgefaßt werden. Die im Zusammenhang mit Gemischen verwendeten Begriffe P.d.v.V. und P.d.v.K. werden hauptsächlich in dem Sinne gebraucht, daß die Gewichtsfunktionen sogleich als virtuelle Verschiebungen bzw. virtuelle Kräfte eingeführt werden. Es werden jedoch mit zwei gesonderten von einander unabhängigen Feld- bzw. Randgleichungen Prinzipe der virtuellen Arbeiten aufgestellt, die sich nicht gegenseitig bedingen.

2.1 Grundgleichungen

Das von den beiden Medien ausgefüllte Gebiet wird mit V bezeichnet, der dazugehörige Rand mit S bzw. Teilabschnitte mit S_j. Für die abgeschlossene Hülle wird $\bar{V}$ eingeführt. Sämtliche noch zu behandelnden Funktionen sind zu den Zeiten $t = t_j$ erklärt, die aus dem Intervall $0 \leq t < \infty$ stammen. Somit gilt für jeden beliebigen Punkt aus $\bar{V}$ mit dem Ortsvektor $\underline{X} = \{X_1, X_2, X_3, t\}$ die Aussage

$$\underline{X} \in \bar{V} \times [0,\infty) \tag{1}$$

Die Abkürzung $f \in C^{m,n}$ soll bedeuten, daß die Funktion $f \in \bar{V} \times [0,\infty)$ in Ortsrichtung m-mal und in Zeitrichtung n-mal partiell stetig differenzierbar ist. Für weitere Erörterungen wird an die Definition des Faltungsproduktes erinnert. Das Produkt zweier Funktionen $v,w \in \bar{V} \times [0,\infty)$ wird zu

$$v * w := \int_0^t v(\underline{X},\tau)\, w(\underline{X},t-\tau)\, d\tau \tag{2}$$

festgelegt. In späterer Verbindung mit (2) wird die Hilfsfunktion

$$g'(\underline{X},t) \equiv 1 \tag{3}$$

gebraucht. Benötigt wird noch der Gaußsche Integralsatz. Für zwei Funktionen $\sigma_{ij}, x_i \in \bar{V}$ der Klasse $\sigma_{ij}, x_i \in C^{1,0}$ gilt die Beziehung

$$\int_S \sigma_{ij} n_j \, x_i \, ds = \int_V (\sigma_{ij,j} \, x_i + \sigma_{ij} \, x_{i,j}) \, dV \, , \qquad (4)$$

wenn n_j die j-te Komponente der äußeren Normalen ist.

Bei"quasistationärer" Bewegung ohne Massenaustausch gilt für das Gleichgewicht eines Gemisches:

1. Komponente $\sigma_{ki,k} + \rho_1 F_i = \pi_i$ (5)
2. Komponente $\tau_{ki,k} + \rho_2 G_i = -\pi_i$ (6)

Mit der Schwerkraft

$$\rho K_i = \rho_1 F_i + \rho_2 G_i \qquad (7)$$

lassen sich (5) und (6) zusammenfassen

3. Gemisch $(\sigma_{ki} + \tau_{ki})_{,k} + \rho \, K_i = o$ (8)

Die Kontinuitätsgleichungen ergeben für inkompressible Medien:

1. Komponente $[(1-n)u_i]_{,i} = \frac{\partial n}{\partial t}$ (9)
2. Komponente $[n \, v_i]_{,i} = - \frac{\partial n}{\partial t}$ (10)
3. Gemisch $w_{i,i} = - \frac{\partial e_{ii}}{\partial t} = - \dot{x}_{i,i}$ (11)

Die Gl. (11) wird mit (2) und (3) zu

$$x_{i,i}(\underline{X},t) + g' * w_{i,i} = \bar{x}_{i,i}(\underline{X},o) \qquad (12)$$

umgeformt. In Gl. (11) ist die Filtergeschwindigkeit

$$w_i = n(v_i - u_i) \qquad (13)$$

benutzt worden. Im Zusammenhang damit wird das Darcysche Gesetz gebracht, das

$$w_i = k_{ij}(\tau_{jk,k} + \rho_2 \, G_j) \qquad (14)$$

lautet und für ideale Flüssigkeiten mit isotroper Durchlässigkeit zu

$$w_i = k \, (\, \tau_{,i} + \rho_2 \, G_i) \qquad (15)$$

vereinfacht werden kann.

Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen für ein Gemisch fest-flüssig lauten für die feste Phase

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\,(x_{i,k} + x_{k,i}) = x_{(i,k)} \tag{16}$$

und für die Verzerrungsgeschwindigkeiten der flüssigen Phase gilt

$$f_{ik} = \frac{1}{2}\,(v_{i,k} + v_{k,i}) = v_{(i,k)} \tag{17}$$

Die Diskussion der Materialgleichungen lieferte für den Festkörper

$$\sigma_{ij} = \alpha_4 e_{mm}\,\delta_{ij} + 2\alpha_5\,e_{ij} + \alpha_8\,\eta\,\delta_{ij}$$

bzw.
$$\sigma_{ij} = (\alpha_4 + \bar{\alpha}_8)\,e_{mm}\,\delta_{ij} + 2\alpha_5\,e_{ij} \tag{18}$$

oder

$$\sigma_{ij} = \bar{c}_{ijkl}\,e_{kl} \tag{19}$$

und für die Flüssigkeit

$$\tau_{ij} = -\,[\bar{\rho}_2(\alpha_6\,\eta + \alpha_8\,e_{mm})]\,\delta_{ij} + \lambda f_{rr}\,\delta_{ij} + 2\mu\,f_{ij} \tag{20}$$

oder

$$\tau_{ij} = \tau\,\delta_{ij} + \kappa'_{ijkl}\,f_{kl} \tag{21}$$

Für den Diffusionswiderstand wird

$$\pi_i = \frac{n}{k}\,(u_i - v_i) \tag{22}$$

angesetzt.

Es verbleibt, die Rand- und Anfangsbedingungen zu klären. Diesbezüglich ist eine Vorbemerkung notwendig, wie die einzelnen Randabschnitte der Komponenten definiert sind.

Die Einteilung der Ränder (Oberflächen) erfolgt prinzipiell in Verschiebungsränder und Kraftränder. Eine Überlagerung beider Randtypen bezüglich eines Mediums ist unzulässig. Zum besseren Verständnis, wie die Randabschnitte S_1 und S_2 des Festkörpers und S_3 und S_4 der Flüssigkeit aufzufassen sind, dient Bild 1.

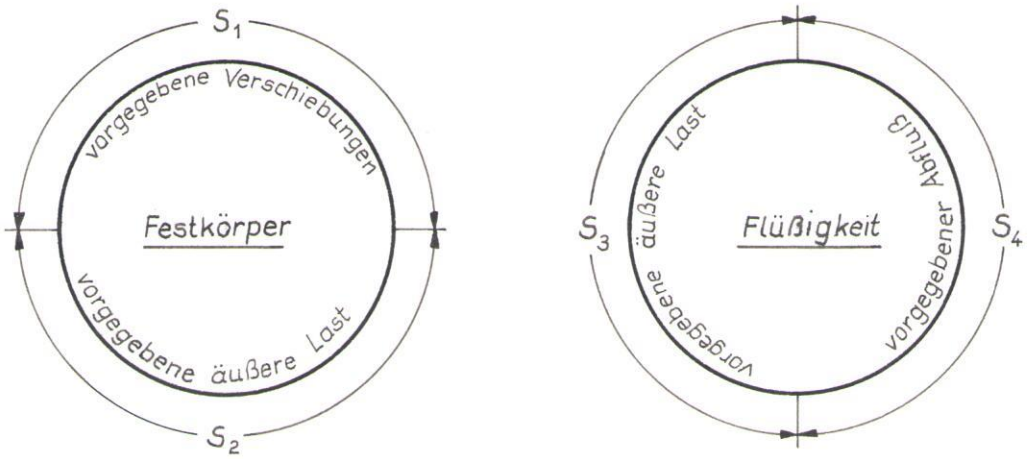

Bild 1: Symbolische Darstellung der definierten Randabschnitte

Wie Bild 1 zeigt, besteht die Möglichkeit, daß die Ränder S_1 und S_2 mit S_3 bzw. S_4 gemeinsame Teilstücke haben können.

Auf dem Verschiebungsrand S_1 gilt

$$x_i(\underline{X},t) = \bar{x}_i(\underline{X},t) \quad \text{auf} \quad S_1 \times [o,\infty) \tag{23}$$

Sind eingeprägte Kräfte vorhanden, soll

$$b_i(\underline{X},t) = \sigma_{ij}(\underline{X},t)\, n_j \quad \text{auf} \quad S_2 \times [o,\infty) \tag{24}$$

und

$$d_i(\underline{X},t) = \tau_{ij}(\underline{X},t)\, n_j \quad \text{auf} \quad S_3 \times [o,\infty) \tag{25}$$

angenommen werden.

Die Abflußmenge Q ist auf S_4 durch

$$Q = \bar{Q}(\underline{X},t) = w_i n_i \quad \text{auf} \quad S_4 \times [o,\infty) \tag{26}$$

gegeben.

Als Anfangsbedingung ist für den Festkörper die Aussage

$$\bar{x}_{i,i}(\underline{X},o) = 0 \text{ in } \bar{V} \tag{27}$$

verfügbar. Nach Voraussetzung 1 - siehe III. Kapitel, Abschnitt 3.2.1 - gilt für die Flüssigkeit auf einem Teil des Randes

$$\bar{Q}(\underline{X},o) = 0 \text{ auf } S_4 \tag{28}$$

2.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V.)

Analog wie in der Elastostatik werden bei dem in diesem Abschnitt aufgestellten P.d.v.V. die Gleichgewichtszustände im Feld und auf dem Rand, die zu jedem Zeitpunkt $t = t_j$ für jede Phase genau definiert sind, mit Lagrangeschen Faktoren $(\delta x_i, \delta y_i)$ multipliziert. Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (16) und die geometrischen Randbedingungen (23) werden später als Nebenbedingen eingeführt. Für bestimmte Gemische, hier z.B. für das Gemisch fest-flüssig, müssen zusätzlich noch die Materialgleichungen in Betracht gezogen werden.

Es gilt die Erkenntnis der Mechanik |11|, daß die Summe der virtuellen Arbeiten verschwindet. Man unterscheidet zwischen der virtuellen äußeren Arbeit δA_a und der virtuellen inneren Arbeit δA_i, die gleich der negativen virtuellen Formänderungsenergie $\delta \Pi_i$ ist. Es gilt

$$\delta A_a(t_j) + \delta A_i(t_j) = o$$

oder

$$\delta A_a(t_j) = \delta \Pi_i(t_j) \tag{29}$$

Das Prinzip (29) bewahrt seine Gültigkeit für sämtliche $t_j \in [o,\infty)$.

Sind die in Gl. (29) vorkommenden Funktionen stetig, so läßt sich der Ausdruck (29) zeitlich integrieren, d.h.

$$\int_o^t \delta A_a(t_j)\, d\tau = \int_o^t \delta \Pi_i(t_j)\, d\tau \tag{30}$$

oder mit den Definitionen (2) und (3)

$$g' * \delta A_a = g' * \delta \Pi_i \tag{31}$$

Die Bewegungsgleichungen (5) bzw. (6) und die Randbedingungen (24) bzw. (25) werden zunächst getrennt mit einer virtuellen Verschiebung $\delta \underline{x}$ multipliziert. Für den Festkörper bedeutet das

$$g' * \int_V (\sigma_{ij,j} + \rho_1 F_i - \pi_i)\, \delta x_i\, dV + g' * \int_S (b_i - \sigma_{ij} n_j)\, \delta x_i\, ds = o \tag{32}$$

Auf ähnliche Art erhält man für die Flüssigkeit

$$g' * \int_V (\tau_{ij,j} + \rho_2 G_i + \pi_i)\, \delta x_i\, dV + g' * \int_S (d_i - \tau_{ij} n_j)\, \delta x_i\, ds = o \tag{33}$$

Die statischen Beziehungen wurden in den Gln. (32) und (33) auf den gesamten Rand erstreckt, da man sich die Verschiebungsränder freigeschnitten vorstellt und die Reaktionskräfte - mit $\hat{b}_i$ und $\hat{d}_i$ bezeichnet - ebenfalls zu den äußeren Lasten zählt. Die virtuellen Gewichtsfunktionen δx_i können willkürlich gewählt werden. Sie müssen sich nur als genügend oft stetig differenzierbar erweisen.

Mit Hilfe des Gausschen Satzes (4) lassen sich die Beziehungen (32) und (33) umformen. Für Gl. (32) folgt

$$g'* \int_V (-\sigma_{ij} \quad \delta x_{i,j} + \rho_1 F_i \, \delta x_i - \pi_i \, \delta x_i) \, dV + g'* \int_{S_1} \hat{b}_i \, \delta x_i \, ds + g'* \int_{S_2} b_i \delta x_i \, ds = o \qquad (34)$$

Aus Gl. (33) ergibt sich analog

$$g'* \int_V (-\tau_{ij} \quad \delta x_{i,j} + \rho_2 G_i \, \delta x_i + \pi_i \, \delta x_i) dV + g'* \int_{S_3} d_i \, \delta x_i \, ds + g'* \int_{S_4} \hat{d}_i \, \delta x_i \, ds = o \qquad (35)$$

Aus den vier Beziehungen (32) bis (35) können P.d.v.V. für ein beliebiges Gemisch aus zwei Komponenten zusammengestellt werden. So folgt aus der Addition der Gln. (34) und (35) unter Einschluß der Gl. (7)

$$g'* \int_V \delta x_{i,j} (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) \, dV = g'* \left(\int_V \rho K_i \, \delta x_i \, dV + \int_{S_1} \hat{b}_i \, \delta x_i \, ds + \int_{S_2} b_i \, \delta x_i \, ds + \int_{S_3} d_i \, \delta x_i \, ds + \int_{S_4} \hat{d}_i \, \delta x_i \, ds \right) \qquad (36)$$

Eine andere Möglichkeit besteht in der Kombination der Gln. (33) und (34). Dieses P.d.v.V. für das Gemisch lautet

$$g'* \int_V (\sigma_{ij} \delta x_{i,j} - \tau_{ij,j} \delta x_i) \, dV = g'* \left(\int_V \rho K_i \delta x_i \, dV + \int_{S_1} \hat{b}_i \, \delta x_i \, ds + \int_{S_2} b_i \, \delta x_i \, ds + \int_S (d_i - \tau_{ij} n_j) \, \delta x_i \, ds \right) \qquad (37)$$

Für ein Gemisch fest-flüssig gelten die Materialgleichungen (19) und (21). Zusätzlich werden die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (16) als Nebenbedingungen eingeführt. Unter diesen Annahmen wird das P.d.v.V. (36) mit den Eigenschaften des Faltungsproduktes zu

$$\int_V (\delta e_{ij} * \bar{c}_{ijkl} e_{kl} + \delta e_{ii} * \tau + \delta e_{ij} * \kappa'_{ijkl} f_{kl}) \, dV =$$

$$\int_V \rho K_i * \delta x_i \, dV + \int_{S_1} \hat{b}_i * \delta x_i \, ds + \int_{S_2} b_i * \delta x_i \, ds + \int_{S_3} d_i * \delta x_i \, ds$$

$$+ \int_{S_4} \hat{d}_i * \delta x_i \, ds \qquad (38)$$

spezialisiert. Ebenso wird das P.d.v.V. (37) in die Form

$$\int_V (\delta e_{ij} * \bar{c}_{ijkl} e_{kl} - \delta x_i * \tau_{,i} - \delta x_i * \kappa'_{ijkl} f_{kl,j}) \, dV =$$

$$\int_V \rho K_i * \delta x_i \, dV + \int_{S_1} \hat{b}_i * \delta x_i \, ds + \int_{S_2} b_i * \delta x_i \, ds + \int_S (d_i - \tau_{ij} n_j) * \delta x_i \, ds \qquad (39)$$

gebracht.

Die virtuellen Verschiebungen δx_i sollen einer Nebenbedingung unterworfen werden. Es wird verlangt, daß sie die Verschiebungsrandbedingungen (23) erfüllen sollen. Mit dieser Einschränkung wird die Aussage

$$\delta x_i(\underline{X}, t) = 0 \quad \text{auf} \quad S_1 \times [o, \infty) \qquad (40)$$

erforderlich. Als Konsequenz ergibt sich, daß in sämtlichen Beziehungen (34), (36) bis (39) die Randintegrale über S_1 fortgelassen werden müssen. Ist der Randabschnitt S_4 ein Teilgebiet von S_1, so verschwindet entsprechend auch das Randintegral über S_4. Insbesondere muß darauf geachtet werden, daß durch Gl. (40) keine Anteile der virtuellen äußeren Arbeit aus dem Integral über S_3 verloren gehen. Die Forderung (40) kann, muß aber nicht erhoben werden.

In dem Prinzip (39) kann der Druckgradient leicht durch die Filtergeschwindigkeit ersetzt werden, wenn das Darcysche Gesetz (15) ebenfalls als Nebenbedingung angesehen wird. Somit folgt aus Gl. (39)

$$\int_V (\delta e_{ij} * \bar{c}_{ijkl} e_{kl} - \delta x_i * k_{ij}^{-1} w_i - \delta x_i * \kappa'_{ijkl} f_{kl,j}) \, dV =$$

$$\int_V \rho_1 F_i * \delta x_i \, dV + \int_{S_1} \hat{b}_i * \delta x_i \, ds + \int_{S_2} b_i * \delta x_i \, ds$$

$$+ \int_S (d_i - \tau_{ij} n_j) * \delta x_i \, ds \qquad (41)$$

Abschließend sei nochmals hervorgehoben, daß die Prinzipe der virtuellen Verschiebungen in der Form (36) und (37) für ein beliebiges Gemisch aus zwei Komponenten gültig sind. Die Spezialfälle (38), (39) und (41) erlauben die Beschreibung des Verhaltens eines Gemisches fest-flüssig unter Einschluß allgemeiner Randbedingungen.

2.3 Prinzip der virtuellen Kräfte (P.d.v.K.)

Wie im vorigen Abschnitt 2.2 ausgeführt wurde, konnte das P.d.v.V. ohne Schwierigkeit auf ein Gemisch bzw. dessen Komponenten übertragen werden. Die in der Elastostatik zum P.d.v.V. komplementäre Methode, die geometrischen Grundgleichungen, wie z.B. (16) und (23),als Eulersche Gleichungen zu interpretieren und mit virtuellen Spannungen zu multiplizieren, soll nicht weiter aufgegriffen werden.

Als bisher noch ungenutzte Information werden die Kontinuitätsgleichungen (9) und (10) herangezogen. Hiermit wird der Vorteil ermöglicht, daß im Gegensatz zum Castiglianoschen Prinzip in der Statik die virtuellen Spannungszustände unabhängig von den Gleichgewichtsaussagen gewählt werden können. Letztere treten nicht als Nebenbedingungen auf, da die Kontinuitätsgleichung eine zweite gesonderte Feld- und Randgleichung verkörpert. Die Lagrangeschen Faktoren werden sogleich als virtuelle Spannungsverläufe $\delta\tau$ betrachtet.

Beim Festkörper bleibt die Masse vollständig erhalten. Deswegen wird nur eine Feldgleichung berücksichtigt. Aus Gl. (9) folgt

$$g'^{*} \int_V \left(\left[(1-n)\, u_i \right]_{,i} - \frac{\partial n}{\partial t} \right) \delta\tau \; dV = 0 \qquad (42)$$

Die Flüssigkeit kann zum freien Rand hin abfließen, so daß außer Gl. (10) noch die Randgleichung (26) beachtet werden muß.

$$g'^{*} \int_V \left(\left[n v_i \right]_{,i} + \frac{\partial n}{\partial t} \right) \delta\tau \; dV + g'^{*} \int_S (Q - w_i n_i)\, \delta\tau \; ds = 0 \qquad (43)$$

Die virtuelle Gewichtsfunktion $\delta\tau$ ist willkürlich wählbar. Sie muß allerdings hinreichend oft stetig differenzierbar sein.

Aus der Kombination der Gln. (42) und (43) resultiert ein P.d.v.K. für das Gemisch. Es gilt

$$g'* \int_V \left(\frac{\partial e_{ii}}{\partial t} + w_{i,i}\right) \delta\tau \, dV + g'* \int_S (Q - w_i n_i) \, \delta\tau \, ds = 0 \qquad (44)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung in der Gestalt (12) gelingt die Einarbeitung der Anfangsbedingung (27). Die geometrische Beziehung (16) taucht wieder als Nebenbedingung auf. Es folgt

$$g'* \int_V (g'* w_{i,i} + x_{i,i}) \, \delta\tau \, dV + g'* \int_S [g'*(Q - w_i n_i)] \delta\tau \, ds = 0 \qquad (45)$$

Unter Verwendung des Gaußschen Satzes (4) wird (45) weiter umgeformt

$$g'* \int_V (g'* w_i \, \delta\tau_{,i} - x_{i,i} \, \delta\tau) \, dV = g'* \int_S g'* Q \, \delta\tau \, ds \qquad (46)$$

Auch das Prinzip (46) bezieht sich auf ein beliebiges zweikomponentiges Gemisch.

Wie aus der bisherigen Darstellung hervorgeht, ist die Abflußrandbedingung auf die gesamte Oberfläche bezogen worden. Gemäß der Einteilung der Flüssigkeitsränder - siehe Bild 1 - ist es sinnvoll zu fordern, daß sich das Randintegral in den Gln. (43) bis (46) nur über den Abschnitt S_4 erstrecken soll. Somit muß die Nebenbedingung eingeführt werden, daß

$$\delta\tau = o \quad \text{auf} \quad S_3$$

gilt.

Als weitere Nebenbedingung erlaubt das Darcysche Gesetz (14) in Verbindung mit dem Stoffgesetz (21) die Veränderung

$$\int_V (g'* k_{ij} \tau_{,j} * \delta\tau_{,j} + g'* k_{ij} \kappa'_{ijkl} f_{kl,j} * \delta\tau_{,j} - x_{i,i} * \delta\tau) \, dV =$$

$$- \int_V g'* k_{ij} \rho_2 G_j * \delta\tau_{,j} \, dV + \int_{S_4} g'* \bar{Q} * \delta\tau \, ds \qquad (47)$$

Durch nochmalige Anwendung des Integralsatzes auf den Therm $x_{i,i} * \delta\tau$ läßt sich das P.d.v.K. in der Gestalt (46) um eine Variante erweitern. Man gewinnt aus Gl. (46)

$$\int_V (g'* w_i * \delta\tau_{,i} + x_i * \delta\tau_{,i}) \, dV =$$

$$\int_{S_4} g' * \bar{Q} * \delta\tau \, ds + \int_{S_4} x_i n_i * \delta\tau \, ds \qquad (48)$$

3. Variationsprinzip für elastisch, poröse Medien nach SANDHU

Als erster und bisher einziger hat SANDHU |6| 1969 ein Variationsprinzip für ein gesättigtes, elastisches, poröses Medium angegeben. Die Nachfolger HWANG u.a. |9|, (1971) benutzten dieselbe Grundlage, ebenso wie VALLIAPPAN |10|, (1974), der versuchsweise mit diesem Funktional geschichtete Medien erschließen wollte. Als Eulersche Gleichungen des Variationsprinzips sieht SANDHU die Aussagen über Gleichgewicht und Kontinuität des Gemisch an |6|. In späteren Arbeiten |7|, |8| werden sämtliche Nebenbedingungen, d.h. somit alle Grundgleichungen, in Betracht gezogen. Das Funktional besitzt dann sechs unabhängige Variable.

3.1 Grundgleichungen

Kommentarlos zitieren SANDHU u.a.|6| die Ausgangsgleichungen für einen von Flüssigkeit durchströmten porösen Körper, die sich stets nur auf das Gemisch beziehen, wie sie von BIOT, MANDEL u.a. entwickelt wurden. Folgende fünf grundlegenden Beziehungen werden als ausreichend betrachtet.

1. Gleichgewicht: $$\sigma_{ij,j} + \tau_{,i}\,\delta_{ij} + \rho K_i = 0 \qquad (49)$$

2. Kontinuität: $$x_{i,i} + g' * w_{i,i} = 0 \qquad (50)$$

3. Stoffgesetz: $$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\, e_{kl} \qquad (51)$$

4. Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung: $$e_{ij} = \frac{1}{2}(x_{i,j} + x_{j,i}) \qquad (52)$$

5. Darcysches Gesetz: $$w_i = k_{ij}\,\Theta_j \qquad (53)$$

mit $$\Theta_j = \tau_{,j} + \rho_2 G_j \qquad (54)$$

Die angegebenen Randbedingungen entsprechen den Formulierungen (23), (24) und (26).

3.2 Variationsprinzip von SANDHU

SANDHU u. PISTER |7| postulieren ein Funktional, dessen erste Variation als Eulersche Gleichungen die Beziehungen (49) bis (54) enthält. Als natürliche Randbedingungen werden die Relationen (24) und (26) betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned}\Omega[\underline{x},\ \underline{e},\ \underline{w},\ \underline{\Theta},\ \underline{g},\ \tau] = \int_V [&-x_i*\sigma_{ij,j} - x_i*\tau_{,i} - 2x_i*\rho K_i + e_{ij}*c_{ijkl}e_{kl} \\ &- 2e_{ij}*\sigma_{ij} + \sigma_{ij}*x_{i,j} + 2g'*w_i*\Theta_i - g'*w_i*\tau_{,i} \\ &- 2g'*w_i*\rho_2 G_i - g'*\Theta_i*k_{ij}\Theta_j + \tau*x_{i,i} + g'*\tau*w_{i,i}]\,dV \\ &- 2\int_{S_2} b_i*x_i\ ds + 2\int_{S_4} g'*\bar{Q}*\tau\ ds \end{aligned} \qquad (55)$$

Nach Einführung der Gln. (51), (52), (53) und (54) zu Nebenbedingungen geht Gl. (55) in

$$\begin{aligned}\Omega[\underline{x},\tau] = \int_V [&\sigma_{ij}*x_{i,j} + 2\tau*x_{i,i} - 2x_i*\rho K_i - g'*w_i*(\tau_{,i}+\rho_2 G_i)]\ dV \\ &-2\int_{S_2} b_i*x_i\ ds + 2\int_{S_4} g'*\bar{Q}*\tau\ ds \end{aligned} \qquad (56)$$

über. Dieser Ausdruck wird auch in |6| und |9| wiedergegeben. Variiert wird nach den Verschiebungen x_i und dem Druck τ.

$$\begin{aligned}\delta\Omega[\underline{x},\tau] = \int_V [&2\delta x_{i,j}*\sigma_{ij} + 2\tau*\delta x_{i,i} + 2\delta\tau*x_{i,i} - 2\delta x_i*\rho K_i \\ &-g'*k_{ij}\delta\tau_{,j}*\tau_{,j} - g'*k_{ij}\delta\tau_{,j}*\rho_2 G_j - g'*k_{ij}\tau_{,j}*\delta\tau_{,j} \\ &-g'*k_{ij}\rho_2 G_j*\delta\tau_{,j}]\ dV - 2\int_{S_2} b_i*\delta x_i\ ds + 2\int_{S_4} g'*\bar{Q}*\delta\tau\ ds \end{aligned} \qquad (57)$$

Die geometrischen Randbedingungen (23) treten in den Formulierungen (55) und (56) als wesentliche Randbedingungen auf. Somit muß beachtet werden, daß die Variation δx_i der Einschränkung

$$\delta x_i(\underline{X},t) = o \qquad \text{auf} \quad S_1 \times [o,\infty) \qquad (58)$$

unterliegt.

Werden die Glieder bezüglich δx_i und $\delta\tau$ getrennt geordnet, so folgt aus Gl. (57)

$$\delta\Omega[\underline{x},\tau] = 2\int_V(\delta x_{i,j}*(\sigma_{ij}+\tau\,\delta_{ij}) - \delta x_i*\rho K_i)\,dV - 2\int_{S_2}\delta x_i*b_i\,ds$$
$$+ 2\int_V(\delta\tau*x_{i,i} - g'*w_i*\delta\tau_{,i})\,dV + 2\int_{S_4} g'*\bar{Q}*\delta\tau ds \qquad (59)$$

Die erste Variation (59) wird vermöge des Gausschen Satzes (4) weiter umgeformt. Es ergibt sich

$$\delta\Omega[\underline{x},\tau] = -2\int_V \delta x_i*(\sigma_{ij,j}+\tau_{,i}+\rho K_i)\,dV - 2\int_{S_2}\delta x_i*(b_i-\sigma_{ij}n_j)\,ds$$
$$+\int_{S_4}\tau*\delta x_i n_i\,ds$$
$$+2\int_V \delta\tau*(g'*w_{i,i}+x_{i,i})\,dV + 2\int_{S_4} g'*(\bar{Q}-w_i n_i)*\delta\tau\,ds \qquad (60)$$

Soll die erste Variation (60) verschwinden, so liefert das Fundamentallemma der Variationsrechnung die Eulerschen Gleichungen

$$\sigma_{ij,j} + \tau_{,i} + \rho K_i = o \qquad (61)$$

$$g'*w_{i,i} + x_{i,i} = o \qquad (62)$$

und die natürlichen Randbedingungen

$$b_i - \sigma_{ij}n_j = o \qquad (63)$$

$$\bar{Q} - w_i n_i = o \qquad (64)$$

Die Gültigkeit der Gln. (61) und (62) ist durch Vergleich mit den Gln. (49) und (50) gesichert. Die Relationen (63) und (64) sind mit den Gln. (24) und (26) zu überprüfen.

Zusätzlich zu diesen Beziehungen tritt aber noch

$$\tau * \delta x_i n_i = o \quad \text{auf} \quad S_4 \times [o,\infty) \qquad (65)$$

hinzu. Der Rand S_4 überlagert sich mit den Rändern S_1 und S_2. Auf der Oberfläche S_1 verschwindet die virtuelle Verschiebung δx_i. Der Druck τ muß i.a. auf S_4, dem Rand mit vorgegebenem Abfluß, als von Null verschieden betrachtet werden. Daraus folgt, daß die Relation (65) im Falle der teilweisen Übereinstimmung von S_2 und S_4 ungültig ist.

Dazu ein physikalisches Beispiel: Man stelle sich eine Halbebene vor, die durch eine Last beansprucht wird, die auf einer undurchlässigen Unterlage ruht. Unterhalb dieser äußeren Last fließt keine Flüssigkeit in Richtung der freien Oberfläche ab. Hier stimmen die Randabschnitte S_2 und S_4 teilweise überein. Es gibt somit eine virtuelle Verschiebung δx_i ungleich Null und es existiert anfangs an diesem Rand ein Flüssigkeitsdruck. Das Produkt $\tau * \delta x_i n_i$ ist jetzt von Null verschieden!

Die Diskussion über die Richtigkeit der Gl. (65) führt zu dem Ergebnis, daß die erste Variation (59) des Funktionals (57) nicht immer verschwinden muß. Somit kann den Funktionalen (55) und (56) kein stationärer Wert zugewiesen werden.

4. Zusammenfassung und Vergleich

Das von SANDHU u. PISTER vorgeschlagene Funktional (55) enthält sämtliche Grundgleichungen des von ihnen betrachteten physikalischen Problems. Zusätzlich sind eine wesentliche und zwei natürliche Randbedingungen vorhanden. Es ist möglich nach sechs unbekannten Funktionen zu variieren. SANDHU u. PISTER geben nicht an, welche Forderungen ihre virtuellen Zustände zu erfüllen haben. Bezüglich der Variation δx_i - siehe Gl. (59) - erweist sich ihr Ergebnis als Spezialfall des P.d.v.V. (36). Das Fehlen eines Randintegrals führt zu dem Schluß, daß das von SANDHU u. PISTER postulierte Funktional in Wahrheit keinen stationären Wert besitzt.

Die Prinzipe der virtuellen Arbeiten, wie sie in den Abschnitten 2.2 und 2.3 entwickelt wurden, behalten ihre Gültigkeit für jedes beliebige Gemisch aus zwei Komponenten. Einschränkend gilt jedoch, daß die Trägheitskräfte vernachlässigt werden können, d.h. der Diffusionsprozeß "quasistationär" abläuft. Die Prinzipe der virtuellen Verschiebungen (36) und (37) wurden durch die Material-

gleichungen (19) und (21) für den Fall eines Gemisches fest-flüssig festgelegt. In ähnlicher Weise wurde beim Prinzip der virtuellen Kräfte vorgegangen. Es entstanden die allgemeinen Formulierungen (46) und (48). Mit Einführung von Zusatzbedingungen wurde das P.d.v.K. (46) zu der Gestalt (47) spezialisiert.

Mit den hier entworfenen P.d.v.A. wird für die praktische Anwendung ein großer Vorteil erzielt. Im Gegensatz zu SANDHU, der sich auf Konsolidation beschränkt, besteht erstmals die Möglichkeit im Grundbau Konsolidationsvorgänge und Grundwasserströmungen gemeinsam erschließen zu können. Auf der Grundlage dieser Prinzipe der virtuellen Arbeiten können numerische Rechnungen aufgebaut werden. Die Existenz eines Funktionals muß nicht erbracht werden.

5. Bezeichnungen:

$\underline{b} = \{b_i\}$ = Oberflächenkraftvektor des Festkörpers

$\underline{\underline{c}} = \{\bar{c}_{ijkl}\}$ = Elastizitätstensor

$\underline{\underline{c}}^{-1} = \{\bar{\bar{c}}^{-1}_{ijkl}\}$ = Inverse des Elastizitätstensors

$\underline{d} = \{d_i\}$ = Oberflächenkraftvektor der Flüssigkeit

$\underline{\underline{e}} = \{e_{ij}\}$ = Verzerrungstensor

$\underline{\underline{f}} = \{f_{ij}\}$ = Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$\underline{F} = \{F_i\}$ = Schwerkraft des Festkörpers

g' = Hilfsfunktion

$\underline{G} = \{G_i\}$ = Schwerkraft der Flüssigkeit

k = Permeabilität, Gl. (15)

$\underline{K} = \{K_i\}$ = Schwerkraft des Gemisches, Gl. (7)

$\underline{\underline{k}} = \{k_{ij}\}$ = Permeabilitätstensor, Gl. (53)

n = relatives Porenvolumen

$\underline{n} = \{n_i\}$ = äußerer Normalvektor

$\bar{Q}$ = Volumenstrom, Gl. (26)

S, S_1, S_2, S_3, S_4 = Rand (Oberflächen)abschnitte

t = Zeitkoordinate

$\underline{u} = \{u_i\}$ = Geschwindigkeit des Festkörpers

$V, \bar{V}$ = Definitionsgebiet, abgeschlossene Hülle von V

$\underline{v} = \{v_i\}$ = Geschwindigkeit der Flüssigkeit

$\underline{w} = \{w_i\}$ = Filtergeschwindigkeit

X_1, X_2, X_3 = Eulersche Koordinaten

$\underline{x} = \{x_i\}$ = Verschiebungen des Festkörpers

$\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \bar{\alpha}_8$ = Materialbeiwerte

$\underline{\underline{\delta}} = \{\delta_{ij}\}$ = Kugeltensor

$\underline{\Theta} = \{\Theta_j\}$ = Gradientenvektor, Gl. (54)

$\underline{\underline{\kappa}}' = \{\kappa'_{ijkl}\}$ = Materialtensor für den Flüssigkeits-
spannungsdeviator, Gl. (21)

λ = Viskosität, Gl.(20)

μ = Volumenviskosität, Gl.(20)

$\underline{\pi} = \{\pi_i\}$ = Diffusionswiderstand

$\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_k, \rho_{Fl}$ = spez. Dichten

$\underline{\underline{\sigma}} = \{\sigma_{ij}\}$ = Spannungstensor des Festkörpers

τ = hydrostatischer Druck

$\underline{\underline{\tau}} = \{\tau_{ij}\}$ = Spannungstensor der Flüssigkeit

Literatur:

[1]	Washizu, K.:	Variational Methods in Elasticity, and Plasticity ,Pergamon Press, 1968
[2]	Buck, K.E., Scharpf, D.W., Stein, E., Wunderlich, W.	Finite Elemente in der Statik Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin, 1973
[3]	Gurtin, M.E.	Variational Principles for Linear Elastodynamics, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 16, p.34, 1964
[4]	Gurtin, M.E.	Variational Principles for Linear Initial-Value Problems Quart. Appl. Math., XXII, No. 3,1964
[5]	Knothe, K.	Variationsprinzipien der Elasto-statik mit gelockerten Stetigkeits-forderungen im Rahmen der Methode der Finiten Elemente Bericht aus dem Inst.f.Luft-u.Raum-fahrt d.TU Berlin, ILR 13, 1974
[6]	Sandhu, R.S., Wilson, E.L.	Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media, ASCE, Vol. 95, EM 3, 1969
[7]	Sandhu, R.S., Pister, K.S.	A Variational Principle for Linear, Compled Field Problems in Continuum Mechanics, Int.J.Engng.Sci., Vol.8, p. 989, 1970
[8]	Sandhu, R.S.,Pister, K.S.	Variational Principles for Boundary Value and Initial-Boundary Value Problems in Continuum Mechanics Int.J.Solids Structures, Vol. 7, p. 639, 1971
[9]	Hwang, C.T., Morgenstern,N.R. Muray, D.W.	On Solution of Plane Strain Consolidation Problems by Finite Element Methods Can.Geo.J., Vol. 8, p. lo9, 1971

|10| Valliappan, S., Lee, I.K., Boonlualohr, P. — Finite Element Analysis of Consolidation Problem. In "Finite Element Methods in Flow Problems", UAH Press, p.741, Swansea, 1974.

|11| Szabó, I. — Höhere Technische Mechanik. Springer Verlag, Berlin, 1964.

V. Kapitel:

Numerische Verfahren für elastisch, poröse Körper

1. Einleitung

Die historische Entwicklung der üblichen Theorien für elastisch, poröse Medien ist kurz im III. Kapitel geschildert worden.

Das eigentliche Ziel sämtlicher Bemühungen bestand darin, das Konsolidationsproblem in der Bodenmechanik beschreiben u n d berechnen zu können. Bis auf einige in der Praxis wenig interessierende Spezialfälle wurde die letzte Ambition mit analytischen Methoden verfehlt. Das ist der Grund, warum bis heute für praktische Setzungsberechnungen notgedrungen auf die eindimensionale Theorie von TERZAGHI zurückgegriffen wird. Große Hoffnung knüpften sich in neuerer Zeit an numerische Näherungsverfahren. Zunächst benutzte man die bekannten Differenzenformeln für die Wärmeleitung und brachte diese in Verbindung mit der "pseudo-dreidimensionalen" Theorie von TERZAGHI-RENDULIC. Der Anfangsdruckzustand mußte auf höchst anfechtbare Weise ermittelt werden, womit die Lösung des Problems schon präjudiziert wird. Außerdem wird nur eine Differentialgleichung für den Porenwasserüberdruck p gelöst, so daß eine Kopplung mit der Volumendilatation e_{ii} entfällt. Die Ergebnisse sind zwar besser als die der eindimensionalen Gleichung, verbleiben dennoch unbefriedigend.

Mit dem Ausbau der Methode der Finiten Elemente auf instationäre Prozesse, am Beispiel der Wärmeleitung von WILSON u. NICKELL |1|, (1966) demonstriert, war die Anwendung dieses Verfahrens auf die Bodenmechanik zu erwarten. Fast gleichzeitig wurden zwei miteinander konkurrierende Formulierungen vorgeschlagen, die eine von CHRISTIAN |2|, (1968), die zweite von SANDHU |7|, (1969). Das Variationsprinzip von SANDHU |7| ist im IV. Kapitel diskutiert worden. Aus diesem Funktional, in dem als unabhängige Größen Verschiebungen und Druck auftauchen, wurden zwei finite Gleichungssysteme gewonnen. Eine Zeititeration in der Art von CRANK-NICOLSON ermöglichte die Berechnung der Unbekannten zu diskreten Zeiten t_j. Zwei Jahre später wiederholten HWANG u.a. |8|, (1971) die Rechnung von SANDHU, allerdings mit ausführlichen Darstellungen ihrer numerischen Ergebnisse. Zu Beginn des Jahres 1974 stellte sich VALLIAPPAN u.a. |9| auf einem Kongress in Swansea, Engl., nochmals mit der Methode von SANDHU vor. In Anlehnung an DESAI behandelt er auch geschichtete Medien. Wie schon im II. Kapitel dargelegt, ist diese Handlungsweise kritikwürdig.

Das Verfahren von CHRISTIAN |2|, u.a. |3| soll nicht detailliert verfolgt werden. Hier wird auf das übliche Prinzip der virtuellen Verschiebungen der Statik zurückgegriffen, das in Verbindung mit dem Bilanzspannungssprinzip gebracht wird. Diese Methode ist umständlich zu handhaben und bedarf erheblicher Rechenzeiten. Das anfänglich positive Echo wurde durch einen Diskussionsbeitrag von FINN u.a. |4|, (1971) getrübt. FINN offenbarte, daß die Qualität der numerischen Resultate stark von der gewählten Netzeinteilung abhängt. Dieser Fehler ist in vergleichbaren statischen Aufgaben nicht so heftig aufgetreten. In ihrer Antwort |4| gestehen CHRISTIAN u. BOEHMER, daß dieser Nachteil ihrer Methode nicht vermieden werden kann. Die letzte Veröffentlichung dieser Arbeiten |6|, (1972) untersucht den ebenen Verzerrungsfall.

Eine Variante zu der Methode von SANDHU bietet ZIENKIEWICZ |10|, S. 332 (1971) an. Rein anschaulich faßt er in der Gleichgewichtsbeziehung die Volumen- und Druckkräfte zu einer neuen, resultierenden Volumenkraft zusammen. Er geht von der Vorstellung aus, daß in dem porösen Körper der gleiche Verschiebungs- und Spannungszustand herrschen würde, wenn diese Resultierende als äußere Last sogleich aufgebracht worden wäre. Ferner übersetzt er die Kontinuitätsgleichung ins Finite.

In den folgenden Abschnitten wird von den P.d.v.A. des IV. Kapitels ausgegangen, mit deren Hilfe zwei finite Systeme abgeleitet werden. Daraus kann wahlweise ein System für Verschiebungen oder Druck gewonnen werden. Neben dem Vorteil der geringeren Unbekanntenzahl verbunden mit einer Verminderung der Rechenzeit gelingt es, einen eindeutigen Anfangszustand bezüglich Druck und Verschiebung in Abhängigkeit der äußeren Last zu berechnen. Die Strategie der Zeititeration, wie im II. Kapitel vorgeschlagen, wird übernommen.

2. Finite Gleichungen für elastisch, poröse Medien

2.1 Grundgleichungen

Für das Prinzip der virtuellen Verschiebungen wurden zwei Varianten entworfen. Die erste lautet - IV. Kap., Gl. (38) -

$$\int_V [\delta e_{ij} * \bar{c}_{ijkl} e_{kl} + \delta e_{ii} * \tau + \delta e_{ij} * \kappa'_{ijkl} f_{kl}] \, dV = \int_V \rho K_i * \delta x_i \, dV$$

$$+ \int_{S_1} \hat{b}_i * \delta x_i \, ds + \int_{S_2} b_i * \delta x_i \, ds + \int_{S_3} d_i * \delta x_i \, ds + \int_{S_4} \hat{d}_i * \delta x_i \, ds \qquad (1)$$

Die zweite Form hat die Gestalt - IV. Kap., Gl. (39) -

$$\int_V [\delta e_{ij} * \bar{c}_{ijkl} e_{kl} - \delta x_i * \tau_{,i} - \delta x_i * \kappa'_{ijkl} f_{kl,j}] \, dV = \int_V \rho K_i * \delta x_i \, dV$$

$$+ \int_{S_1} \hat{b}_i * \delta x_i \, ds + \int_{S_2} b_i * \delta x_i \, ds + \int_{S} [d_i - \tau_{ij} n_j] * \delta x_i \, ds \qquad (2)$$

In die Gln. (1) und (2) werden folgende Prämisse eingeführt:

1. Keine Zähigkeitskräfte: $\kappa'_{ijkl} = o$
2. Überlagerung der Ränder S_1 und S_4
3. Erfüllung der geometrischen Randbedingungen auf S_1
4. Erfüllung der statischen Randbedingungen auf S_3

Mit diesen Vereinfachungen wird aus Gl. (1)

$$\int_V [\delta e_{ij} * \bar{c}_{ijkl} e_{kl} + \delta e_{ii} * \tau] \, dV = \int_V \delta x_i * \rho K_i \, dV + \int_{S_2} \delta x_i * b_i \, ds \qquad (4)$$

und aus Gl. (2)

$$\int_V [\delta e_{ij} * \bar{c}_{ijkl} e_{kl} - \delta x_i * \tau_{,i}] \, dV = \int_V \delta x_i * \rho K_i \, dV + \int_{S_2} \delta x_i * b_i \, ds \qquad (5)$$

gewonnen.

Auch für das Prinzip der virtuellen Kräfte ist eine Alternative möglich. Entweder wird eine Formulierung gemäß - IV. Kap., Gl. (46) -

$$\int_V [\delta \tau_{,i} * g' * w_i - \delta \tau * e_{ii}] \, dV = \int_{S_4} \delta \tau * g' * \bar{Q} \, ds \qquad (6)$$

oder vermöge - IV. Kap., Gl. (48) -

$$\int_V [\delta \tau_{,i} * g' * w_i + \delta \tau_{,i} * x_i] \, dV = \int_{S_4} \delta \tau * g' * \bar{Q} \, ds + \int_{S_4} \delta \tau * x_i n_i \, ds \qquad (7)$$

bevorzugt.

2.2 Matrizenschreibweise

Die gesuchten Verschiebungs- (Spannungs)zustände werden zu jedem Zeitpunkt t_j im Gebiet und auf dem Rand durch geeignete Verlaufsfunktionen $\Phi_x(\Phi_p)$ approximiert, die für alle Zeiten beibehalten werden. Als zeitlich abhängig werden die Werte in den Knotenpunkten betrachtet. Unter diesem Blickpunkt wird für das Verschiebungsfeld

$$\tilde{\underline{x}}(\underline{X},t) = \Phi_x^t(\underline{X})\ \underline{x}(t) \tag{8}$$

und für das Druckfeld

$$\tilde{\underline{p}}(\underline{X},t) = \Phi_p^t(\underline{X})\ \underline{p}(t) \tag{9}$$

angesetzt. Die Verläufe Φ_x und Φ_p sind noch unbekannte Gebietsfunktionen. Die Spaltenvektoren $\underline{x}$ und $\underline{p}$ enthalten sämtliche Komponenten des Verschiebungs- bzw. Spannungsvektors. In Matrizenform lauten die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen mit dem Differentialoperator D_x

$$\tilde{\underline{e}} = D_x\ \tilde{\underline{x}} \tag{10}$$

oder mit Gl. (8)

$$\tilde{\underline{e}} = \Phi_e^t\ \underline{x}\ , \tag{11}$$

das Elastizitätsgesetz mit dem Eigenspannungszustand $\tilde{\underline{\sigma}}_o$

$$\tilde{\underline{\sigma}} = \overline{E}\ \tilde{\underline{e}} + \tilde{\underline{\sigma}}_o \tag{12}$$

oder mit (11)

$$\tilde{\underline{\sigma}} = \overline{E}\ \Phi_e^t\ \underline{x} + \tilde{\underline{\sigma}}_o \tag{13}$$

und das Darcysche Gesetz mit dem Gradientenoperator D_p

$$\tilde{\underline{w}} = K\ D_p\ \tilde{\underline{p}} + K\ \{\bar{\rho}_2 G\} \tag{14}$$

oder mit (9)

$$\tilde{\underline{w}} = K\ \Phi_w^t\ \underline{p} + K\ \{\bar{\rho}_2 G\} \tag{15}$$

Für den Verlauf des Druckgradienten wird

$$\underset{\sim}{\underline{p}}_{\partial} = \Phi_w^t \, \underline{p} \tag{16}$$

festgelegt. Die virtuellen Zustände werden lokal durch die gleichen Ansätze wiedergegeben, die für die Approximation der wirklichen Zustände geeignet sind. Somit gilt für die virtuellen Verzerrungen

$$\delta\underset{\sim}{\underline{e}}^t = \delta\underline{x}^t \, \Phi_e \quad , \tag{17}$$

für die virtuelle Volumendilatation

$$\delta\underset{\sim}{\underline{e}}^{*t} = \delta\underline{x}^t \, \Phi_e^* \quad , \tag{18}$$

für die virtuellen Drücke

$$\delta\underset{\sim}{\underline{p}}^t = \delta\underline{p}^t \, \Phi_p \quad , \tag{19}$$

und für die virtuellen Druckgradienten

$$\delta\underset{\sim}{\underline{p}}_{\partial}^t = \delta\underline{p}^t \, \Phi_w \tag{20}$$

2.3 Aufbau der finiten Gleichungssysteme

In der im vorigen Abschnitt 2.2 eingeführten symbolischen Schreibweise werden die P.d.v.A. des Abschnittes 2.1 ausgedrückt. Für die P.d.v.V. gilt entweder

$$\int_V \left[\delta\underset{\sim}{\underline{e}}^t * \underset{\sim}{\underline{\sigma}} + \delta\underset{\sim}{\underline{e}}^{*t} * \underset{\sim}{\underline{p}}\right] dV = \int_V \delta\underset{\sim}{\underline{x}}^t * \{\rho K\} \, dV + \int_{S_2} \delta\underset{\sim}{\underline{x}}^t * \{b\} \, ds \tag{21}$$

oder

$$\int_V \left[\delta\underset{\sim}{\underline{e}}^t * \underset{\sim}{\underline{\sigma}} - \delta\underset{\sim}{\underline{x}}^t * \underset{\sim}{\underline{p}}_{\partial}\right] dV = \int_V \delta\underset{\sim}{\underline{x}}^t * \{\rho K\} \, dV + \int_{S_2} \delta\underset{\sim}{\underline{x}}^t * \{b\} \, ds \tag{22}$$

Die P.d.v.K. erscheinen in der Form

$$\int_V \left[\delta\underset{\sim}{\underline{p}}_{\partial}^t * g' * \underset{\sim}{\underline{w}} - \delta\underset{\sim}{\underline{p}}^t * \underset{\sim}{\underline{e}}^*\right] dV = \int_{S_4} \delta\underset{\sim}{\underline{p}}^t * g' * \{Q\} \, ds \tag{23}$$

und

$$\int_V \left[\delta\underset{\sim}{\underline{p}}_{\partial}^t * g' * \underset{\sim}{\underline{w}} + \delta\underset{\sim}{\underline{p}}_{\partial}^t * \underset{\sim}{\underline{x}}\right] dV = \int_{S_4} \delta\underset{\sim}{\underline{p}}^t * g' * \{Q\} \, ds + \int_S \delta\underset{\sim}{\underline{p}}^t * \underset{\sim}{\underline{x}} \, ds \tag{24}$$

Gemäß der Methode der Finiten Elemente erstrecken sich die Ansatzfunktionen Φ_x und Φ_p über einen lokalen Bereich, so daß das Integrationsgebiet zunächst das beliebige Element V_m ist. Unter Ausnutzung der Beziehungen (8) bis (20) werden die Prinzipe (21) bis (24) weiter umgeformt.

Aus dem P.d.v.V. erhält man die lokalisierten Gleichungen

$$\delta\underline{x}^t * \Big[\int_V \Phi_e \overline{E} \Phi_e^t \, dV_m \, \underline{x} + \int_V \Phi_e^* \Phi_p^t \, dV_m \, \underline{p} \Big] =$$

$$\delta\underline{x}^t * \Big[\int_V \Phi_x \{\rho K\} \, dV_m + \int_{S_2} \Phi_{sx} \{b\} \, ds_m - \int_V \Phi_e \{\sigma_o\} \, dV_m \Big] \qquad (25)$$

und

$$\delta\underline{x}^t * \Big[\int_V \Phi_e \overline{E} \Phi_e^t \, dV_m \, \underline{x} - \int_V \Phi_x \Phi_w^t \, dV_m \, \underline{p} \Big] = \ldots\ldots \qquad (26)$$

Die rechte Seite der Gl. (26) stimmt mit derjenigen der Gl. (25) überein. Völlig analog werden die P.d.v.K. umgestaltet. Es folgt aus Gl. (23)

$$\delta\underline{p}^t * \Big[g' * \int_V \Phi_w K \Phi_w^t \, dV_m \, \underline{p} - \int_V \Phi_p \Phi_e^* \, dV_m \, \underline{x} \Big] =$$

$$\delta\underline{p}^t * \Big[g' * \int_{S_4} \Phi_{sp} \{Q\} \, ds_m - g' * \int_V \Phi_w \{\rho G\} \, dV_m \Big] \qquad (27)$$

und aus Gl. (24)

$$\delta\underline{p}^t * \Big[g' * \int_V \Phi_w K \Phi_w^t \, dV_m \, \underline{p} + \int_V \Phi_w \Phi_x^t \, dV_m \, \underline{x} \Big] =$$

$$\delta\underline{p}^t * \Big[g' * \int_{S_4} \Phi_{sp} \{Q\} \, ds_m - g' * \int_V \Phi_w \{\rho G\} \, dV_m + \int_S \Phi_{sp} \{\bar{x}\} \, ds_m \Big] \qquad (28)$$

Zur weiteren schematischen Darstellung werden folgende Definitionen vereinbart |7|, |8|.

$$\underline{S}_m = \int_V \Phi_e \, \overline{E} \, \Phi_e^t \, dV_m$$

$$\underline{C}_m = \int_V \Phi_e^* \, \Phi_p^t \, dV_m$$

$$\underline{L}_m = \int_V \Phi_x \, \Phi_w^t \, dV_m$$

$$\underline{F}_m = \int_V \Phi_w \, K \, \Phi_w^t \, dV_m$$

$$\underline{P}_m^1 = \int_{S_2} \Phi_{sx} \{b\} \, ds_m$$

$$
\begin{aligned}
\underline{P}_m^2 &= \int_{S_4} \Phi_{sp} \{Q\} \, ds_m \\
\underline{P}_m^3 &= \int_{S} \Phi_{sp} \{\bar{x}\} \, ds_m \\
\underline{M}_m^1 &= \int_{V} \Phi_e \{\sigma_o\} \, dV_m \\
\underline{M}_m^2 &= \int_{V} \Phi_x \{\rho K\} \, dV_m \\
\underline{M}_m^3 &= \int_{V} \Phi_w \{\rho G\} \, dV_m
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Für jedes Einzelfeld lautet das Prinzip (25) mit den Gln. (29) in Matrizenschreibweise

$$\underline{S}_m \, \underline{x} + \underline{C}_m \underline{p} = \underline{P}_m^1 - \underline{M}_m^1 + \underline{M}_m^2 = \underline{s}_m \tag{30}$$

und das Prinzip (26)

$$\underline{S}_m \, \underline{x} - \underline{L}_m \, \underline{p} = \underline{s}_m \tag{31}$$

Das Gesamtsystem wird durch Summation über alle Teilbereiche ermittelt. Zu diesem Zweck werden die Systemmatrizen

$$\underline{S} = \underline{S}(\underline{S}_m) \;, \quad \underline{C} = \underline{C}(\underline{C}_m) \;, \quad \text{usw.} \tag{32}$$

vorgeschlagen, so daß die finite Aussage der Gleichgewichtsbeziehung für das Gemisch entweder zu

$$\underline{S} \, \underline{x} + \underline{C} \, \underline{p} = \underline{s} \tag{33}$$

oder zu

$$\underline{S} \, \underline{x} - \underline{L} \, \underline{p} = \underline{s} \tag{34}$$

formuliert werden kann. Ebenso in Matrizenform werden die P.d.v.K. dargestellt. Es gilt für Gl. (27)

$$g'^* \, \underline{F}_m \, \underline{p} - \underline{C}_m^t \, \underline{x} = g'^*(\underline{P}_m^2 - \underline{M}_m^3) = - g'^* \underline{f}_m \tag{35}$$

und für Gl. (28)

$$g'^* \, \underline{F}_m \, \underline{p} + \underline{L}_m^t \, \underline{x} = g'^*(\underline{P}_m^2 - \underline{M}_m^3) + P_m^3 = -g'^* \underline{f}_m + \underline{l}_m \tag{36}$$

Mit den Abkürzungen (32) lautet die finite Übersetzung der Kontinuitätsgleichung für das Gemisch

$$\underline{C}^t \underline{x} - g'^* \underline{F}\, \underline{p} = g'^* \underline{f} \qquad (37)$$

bzw.

$$\underline{L}^t \underline{x} + g'^* \underline{F}\, \underline{p} = -g'^* \underline{f} + \underline{l} \qquad (38)$$

3. Lösungsmethoden

Die wichtigsten Resultate der bisherigen Abschnitte müssen in den finiten Gleichungssystemen

$$\underline{S}\, \underline{x} + \underline{C}\, \underline{p} = \underline{s} \qquad (39a)$$

$$\underline{C}^t \underline{x} - g'^* \underline{F}\, \underline{p} = g'^* \underline{f} \qquad (39b)$$

und

$$\underline{S}\, \underline{x} - \underline{L}\, \underline{p} = \underline{s} \qquad (40a)$$

$$\underline{L}^t \underline{x} + g'^* \underline{F}\, \underline{p} = -g'^* \underline{f} + \underline{l} \qquad (40b)$$

gesehen werden.

Die Systeme (39) und (40) unterscheiden sich nur durch die Matrizen $\underline{C}$ und $\underline{L}$, deren verschiedenartige Struktur durch Umformungen mit dem Gausschen Integralsatz zu erklären ist. Auch bei gleichen Ansatzfunktionen besitzen $\underline{C}$ und $\underline{L}$ einen anderen Matrizenaufbau. Im Rahmen der Rechengenauigkeit müssen beide Formulierungen (39) und (40) die gleichen Ergebnisse liefern, wodurch die numerische Stabilität des Verfahrens überprüft werden kann. Die Matrix $\underline{C}$ bzw. $\underline{L}$ beeinflußt das Verhalten der Zeititeration. In den ersten Iterationsschritten sind geringe Abweichungen zu erwarten.

3.1 Gesamtsystem nach SANDHU

Die Beziehungen (39) gelten zu jedem Zeitpunkt $t_j \in [o,\infty)$. Zusätzlich wird die Annahme vertreten, daß aus physikalischen Gründen der stattfindende Prozess hinreichend glatt abläuft, d.h. die Funktionen $\tilde{\underline{x}}$ und $\tilde{\underline{p}}$ entstammen der Klasse $C^{1,1}$. Unter diesem Gesichtspunkt ist die Gl. (39b) sofort partiell differenzierbar. Es folgt

$$\underline{C}^t \dot{\underline{x}} - \underline{F}\, \underline{p} = \underline{f} \qquad (41)$$

Für die zeitliche Ableitung werden Differenzenformeln eingesetzt. Wie z.B. aus der Wärmeleitung bekannt, siehe II. Kapitel, empfiehlt sich die Methode nach CRANK-NICOLSON, die sich als bedingungslos stabil erwiesen hat. Somit erhält man aus Gl. (41)

$$\underline{C}^t(\underline{x}_{j+1}-\underline{x}_j)/\Delta t - \underline{F}(\underline{p}_{j+1}+\underline{p}_j)/2 = (\underline{f}_{j+1}+\underline{f}_j)/2 \qquad (42)$$

SANDHU mimmt das Gleichgewicht (39a) an der Stelle $t=t_{j+1}$

$$\underline{S}\,\underline{x}_{j+1} + \underline{C}\,\underline{p}_{j+1} = \underline{s}_{j+1} \qquad (43)$$

Sämtliche Unbekannte werden in einem neuen Vektor

$$\underline{y}_j = \underline{x}_j + \underline{p}_j \qquad (44)$$

zusammengefaßt, so daß ein lineares Gesamtsystem entsteht, das die Struktur

$$\underline{A}_o\,\underline{y}_{j+1} = \underline{A}_1\,\underline{y}_j + \underline{r}_j \qquad (45)$$

besitzt. Die symbolische Darstellung der Gl. (45) hat die Gestalt:

$$\begin{bmatrix} \underline{S} & \underline{C} \\ \underline{C}^t & -\frac{\Delta t}{2}\underline{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{j+1} \\ \underline{p}_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Theta} & \underline{\Theta} \\ \underline{C}^t & \frac{\Delta t}{2}\underline{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_j \\ \underline{p}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{s}_{j+1} \\ \frac{\Delta t}{2}(\underline{f}_{j+1}+\underline{f}_j) \end{bmatrix} \qquad (46)$$

Die finiten Gleichungen (46) sind von SANDHU |7| schrittweise gelöst worden. HWANG |8| hat die Gln. (46) bezüglich der Schrittweite Δt variabel gestaltet, ansonsten aber keine Veränderungen vorgenommen. In |7| und |8| wurden gute numerische Ergebnisse für den ebenen Verzerrungsfall veröffentlicht. Ähnliche Resultate weist VALLIAPPAN |9| vor. Wie der Literatur und anderen Hinweisen |14|, |15| zu entnehmen ist, ist dies der Stand der Numerik auf diesem Gebiet bis zum Frühjahr 1975.

3.2 Verschiebungsmethode

Für einen homogenen, isotropen Festkörper und für isotrope Permeabilität können die Gln. (39) geringfügig modifiziert werden.

$$\alpha_1 \underline{S}^* \underline{x} + \underline{C}\, \underline{p} = \underline{s} \tag{47}$$

$$\underline{C}^t \underline{x} - g' * \alpha_2 \underline{F}^* \underline{p} = g' * \underline{f} \tag{48}$$

Hier bedeuten α_1 und α_2 Materialkenngrößen. Diese nehmen für den ebenen Verzerrungsfall die Werte

$$\alpha_1 = \bar{E}_s/(1-\nu^2) \tag{49}$$

und

$$\alpha_2 = k \tag{50}$$

an. Unter den Annahmen des Abschnitts 3.1 wird Gl. (48) differenziert.

$$\underline{C}^t \dot{\underline{x}} - \alpha_2 \underline{F}^* \underline{p} = \underline{f} \tag{51}$$

Es besteht kein Anlaß sofort Differenzenformeln zu verwenden. Da bei praktischen Problemen oft nur ein Unbekanntentyp von Interesse ist, soll hier der Druck eliminiert werden.

Die Steifigkeitsmatrix $\underline{F}$ ist nicht singulär, so daß Gl. (51) nach $\underline{p}$ aufgelöst werden kann. Es folgt

$$\underline{p} = \frac{1}{\alpha_2} \underline{F}^{*-1} [\underline{C}^t \dot{\underline{x}} - \underline{f}] \tag{52}$$

Einsetzen der Beziehung (52) in das Gleichgewicht (47) liefert ein System, in dem nur noch Verschiebungen als Unbekannte vorhanden sind. Man erhält aus Gl. (47) und (52) den Ausdruck

$$\alpha_1 \underline{S}^* \underline{x} + \frac{1}{\alpha_2} \underline{C}\, \underline{F}^{*-1}\, \underline{C}^t \dot{\underline{x}} = \underline{s} + \frac{1}{\alpha_2} \underline{C}\, \underline{F}^{*-1}\, \underline{f} \quad , \tag{53}$$

der sich zu

$$\alpha_1\alpha_2 \underline{S}_o \underline{x} + \underline{S}_1 \dot{\underline{x}} = \alpha_2 \underline{s}_o \tag{54}$$

abkürzen läßt. Jetzt wird Gl. (54) in der bewährten Art von CRANK-NICOLSON behandelt. Mit Einführung eines dimensionslosen Faktors

$$\alpha_o := \alpha_1\alpha_2\Delta t/2 \tag{55}$$

läßt sich Gl. (54) in

$$(\underline{S}_1 + \alpha_o \underline{S}_o)\, \underline{x}_{j+1} = (\underline{S}_1 - \alpha_o \underline{S}_o)\, \underline{x}_j + \alpha_2 \Delta t\, \underline{s}_o \qquad (56)$$

überführen. Aus Gl. (56) läßt sich zu diskreten Zeitpunkten t_j das Verschiebungsfeld ermitteln. Bei Bedarf kann auch der zugehörige Druckzustand gefunden werden. Gemäß Gl.(52) gilt für diesen

$$\underline{p}_{j+1} = \frac{1}{\alpha_2}\, \underline{F}^{*-1}\, \underline{C}^t (\underline{x}_{j+1} - \underline{x}_j)/\Delta t - \frac{1}{\alpha_2}\, \underline{F}^{*-1}\, \underline{f} \qquad (57)$$

Mit der Definition des Vektors

$$\underline{x}_{j+1/2} = (\underline{x}_{j+1} + \underline{x}_j)/2 \qquad (58)$$

kann aus Gl. (54) eine Alternative zu Gl. (56) entwickelt werden. Man bekommt

$$(\underline{S}_1 + \alpha_o \underline{S}_o)\, \underline{x}_{j+1/2} = \underline{S}_1\, \underline{x}_j + \frac{\alpha_2 \Delta t}{2}\, \underline{s}_o \qquad (59)$$

Die Unbekannten zum Zeitpunkt t_{j+1} müssen vermöge Gl. (58) berechnet werden. Der gewonnene Vorteil der Form (59) besteht in der Tatsache, daß bei Änderung der Schrittweite Δt nur die linke Seite von Gl. (59) neu aufgebaut werden muß.

3.3 Druckmethode

Als Alternative zur Verschiebungsmethode wird ein lineares System abgeleitet, das als Unbekanntentyp nur Drücke enthält. Das wird durch Auflösen des Gleichgewichts (47) nach den Verschiebungen erreicht

$$\underline{x} = \frac{1}{\alpha_1}\, \underline{S}^{*-1}\, [\underline{s} - \underline{C}\, \underline{p}] \qquad (60)$$

Das ist möglich, weil die Steifigkeitsmatrix $\underline{S}$ regulär ist. Einsetzen der Gl. (60) in die Kontinuität (48) ergibt

$$\frac{1}{\alpha_1}\, \underline{C}^t\, \underline{S}^{*-1}\, \underline{C}\, \underline{p} + \alpha_2 \int_o^t \underline{F}\, \underline{p}\, dt = \int_o^t \underline{f}\, dt + \frac{1}{\alpha_1}\, \underline{C}^t\, \underline{S}^{*-1}\, \underline{s} \qquad (61)$$

Die Formulierung (61) zeigt zwei Wege. Entweder werden die Integrale numerisch ausgewertet oder es wird zeitlich differenziert. Letztere Möglichkeit liefert bei zeitlich konstanter äußerer Last

$$\underline{F}_1 \dot{\underline{p}} + \alpha_1\alpha_2 \underline{F}_o \underline{p} = \alpha_1 \underline{f} \tag{62}$$

Mit CRANK-NICOLSON wird aus Gl. (62) schließlich

$$(\underline{F}_1 + \alpha_o \underline{F}_o) \underline{p}_{j+1} = (\underline{F}_1 - \alpha_o \underline{F}_o) \underline{p}_j + \alpha_1 \Delta t \underline{f}_j \tag{63}$$

gewonnen. Bei Anwendung der Trapezregel auf Gl. (61) hätte man

$$(\underline{F}_1 + \alpha_o \underline{F}_o) \underline{p}_{j+1} = -\alpha_o \underline{F}_o \underline{p}_j + \frac{\alpha_1}{2} \Delta t(\underline{f}_{j+1}+\underline{f}_j) + \underline{C}^t \underline{S}^{*-1} \underline{s} \tag{64}$$

erhalten. Die Mittelwertbildung

$$\underline{p}_{j+1/2} = (\underline{p}_{j+1} + \underline{p}_j)/2 \tag{65}$$

ermöglicht eine dritte Formulierung

$$(\underline{F}_1 + \underline{\alpha}\, \underline{F}_o) \underline{p}_{j+1/2} = \underline{F}_1 \underline{p}_j + \frac{\alpha_1 \Delta t}{2} \underline{f}_j \tag{66}$$

Aus der Kenntnis des Druckfeldes kann umgehend das entsprechende Verschiebungsfeld berechnet werden. Gemäß der Beziehung (60) gilt

$$\underline{x}_{j+1} = \underline{x}_{elast.} - \frac{1}{\alpha_1} \underline{S}^{*-1} \underline{C}\, \underline{p}_{j+1} \tag{67}$$

3.4 Diskussion der Anfangsbedingungen

Wie schon im III. Kapitel erläutert wurde, lautet die physikalische Anfangsbedingung, daß die Volumendilatation zu Beginn Null ist, d.h.

$$e_{ii} = 0 \tag{68}$$

Die finite Übertragung der Gl. (68) lautet

$$\underline{C}^t \underline{x}_o = \underline{\Theta} \tag{69}$$

oder entsprechend

$$\underline{L}^t \, \underline{x}_o = \underline{\Theta} \tag{70}$$

Aus der Forderung (68) folgt

$$\underline{f}_o = \underline{\Theta} \tag{71}$$

Das System (39) gestattet zum Zeitpunkt t=o die Aussagen

$$\underline{x}_o = \underline{S}^{-1} \, [\underline{s} - \underline{C} \, \underline{p}_o] \tag{72}$$

und

$$\underline{C}^t \, \underline{x}_o = \underline{\Theta} \tag{73}$$

Die Kontinuitätsgleichung (39b) entartet zu der Form (73), die der Gl. (68) äquivalent ist. Aus den Beziehungen (72) und (73) folgt der Anfangsdruckzustand

$$\underline{C}^t \, \underline{S}^{-1} \, \underline{C} \, \underline{p}_o = \underline{C}^t \, \underline{S}^{-1} \, \underline{s} \tag{74a}$$

oder

$$\underline{F}_1 \, \underline{p}_o = \underline{s}^* \tag{74b}$$

der auch der Gl. (61) entnommen werden kann. Der Ausdruck (74) legt ein eindeutiges Druckfeld fest, das im Gebiet und auf dem Rand kurz nach Aufbringen der äußeren Last zur Zeit t= + o herrscht. Ist der Vektor $\underline{p}_o$ berechnet worden, so kann vermöge Gl. (72) der Anfangsverschiebungszustand gefunden werden.

Der hier eingeschlagene Weg unterscheidet sich von der Vorgehensweise von BOOKER |16| u.a. dadurch, daß letzterer zwar die Gl. (69) angibt, die Gln. (74) fehlen aber! BOOKER versucht lediglich die Stabilität des Gesamtsystems nach SANDHU zu ergründen.

Der Erörterung des Anfangszustandes widmet sowohl SANDHU |7| als auch HWANG |8| keinen Raum. Ihre Rechnungen lassen vermuten, wie durch andere Hinweise |14|, |15| bestätigt wurde, daß sie stillschweigend neben Gl. (71) den Zustand

$$\underline{x}_o = \underline{p}_o = \underline{\Theta} \tag{75}$$

zugrunde legen. Diese Voraussetzung (75) bedeutet für das System (46)

$$\underline{S}\ \underline{x}_1 + \underline{C}\ \underline{p}_1 = \underline{s} \tag{76}$$

$$\underline{C}^t\ \underline{x}_1 - \frac{\Delta t}{2}\ \underline{F}\ \underline{p}_1 = \underline{\Theta} \tag{77}$$

woraus für den ersten Iterationsschritt die Schlußfolgerung

$$\left[\underline{C}^t\ \underline{S}^{-1}\ \underline{C} + \frac{\Delta t}{2}\ \underline{F}\right]\ \underline{p}_1 = \underline{C}^t\ \underline{S}^{-1}\ \underline{s} \tag{78}$$

zulässig ist. Wenn die erste Schrittweite Δt sehr klein gewählt worden ist, zeigt der Vergleich zwischen (74a) und (78), daß die Annahme (75) vertretbar ist. Für die ersten Iterationsschritte werden somit zwischen dem Gesamtverfahren und der Druckmethode geringfügige Abweichungen zu erwarten sein.

Wenn auch die Formel (74) nur näherungsweise einen Anfangsdruckzustand zu ermitteln erlaubt, so gelingt es jedoch, die lange Ungewißheit zu beseitigen, die in der Bodenmechanik in diesem Fall bestand. Zahlreiche Abhilfen - siehe III. Kapitel, Abschnitt 3.2.8 - sind somit überflüssig geworden.

3.5 Vergleich der Verfahren

In den Abschnitten 3.1 bis 3.3 sind mehrere Wege eingeschlagen worden um das System (39) numerisch lösen zu können. Die Entscheidung, die für oder gegen die praktische Anwendung der entwickelten Methoden getroffen werden muß, soll durch einige Kriterien erleichtert werden. Die beiden wichtigsten Merkmale für die Programmierung unter denen jedes numerische Verfahren gesehen werden muß, sind Speicherbedarf und Rechenzeit. Letztere ist insbesondere der Anzahl der Rechenoperationen proportional.

Das Gesamtverfahren hat zweifellos den Vorteil, daß nach Aufbau der Matrizen $\underline{S}$, $\underline{F}$ und $\underline{C}$ bzw. $\underline{L}$ die Koeffizientenmatrizen $\underline{A}_o$ und $\underline{A}_1$ sofort zusammengestellt werden können. Weitere Matrizenoperationen sind nicht erforderlich. Die Zeititeration kann sofort gestartet werden. Die Koeffizienten des Systems (46) können durch Vertauschung von Zeilen und Spalten auf Bandstruktur gebracht werden. Das wird dadurch erreicht, indem die Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{p}$ nicht wie im Gesamtsystem (46) hintereinander zu finden sind sondern ineinander verschachtelt werden. Das kostet aber zusätzliche Rechenzeit; der Speicherbedarf wird erheblich gemindert. Die Verschiebungsmethode besitzt geringere Unbekanntenzahlen. Als Vorteil wird die sofortige Einführung eines dimensionslosen Faktors α_o gewertet. Als Nachteil erweist sich, daß das Druckfeld aus

dem Verschiebungszustand durch Differentation erhalten wird. Einsetzen von Differenzenformeln bedeutet einen Genauigkeitsverlust. Ein weiterer Nachteil muß in der Unklarheit des Anfangsverschiebungszustandes vermerkt werden. Entweder wird er zu Null angenommen oder er muß gemäß den Gl. (72) und (74) errechnet werden. Hierzu ist der Aufbau der Matrix $\underline{F}_1$ notwendig, die auch bei der Druckmethode Verwendung findet. Das numerische Verhalten dieser Methode wird durch den dimensionslosen Parameter α_o mitbestimmt. Hier bereitet die Ermittlung des Anfangszustandes keine Schwierigkeiten. Ein großer Vorteil der Druckmethode besteht in den relativ kleinen Koeffizientenmatrizen.

Um Speicherbedarf und Rechenzeit der Druckmethode und des Gesamtverfahrens miteinander ins Verhältnis setzen zu können, soll ein Zahlenbeispiel vorexerziert werden, unter der Voraussetzung, daß das System (46) in dieser ursprünglichen Form verbleibt. Die Anzahl der Unbekannten insgesamt sei

$$n = n_1 + n_2 \,, \tag{79}$$

wobei n_1 die Zahl der Verschiebungen und n_2 die der Drücke bezeichnet. Im dreidimensionalen Fall ist bei Benutzung des gleichen Elementtypes für beide Größen die Beziehung

$$n_1 = 3n_2 \tag{80}$$

gültig, so daß aus Gl. (79)

$$n = 4n_2 \tag{81}$$

folgt. Die Abmessungen a der Koeffizientmatrizen des Gesamtverfahrens und der Druckmethode stehen in dem Verhältnis

$$a_G : a_D = 16 : 1 \tag{82}$$

Die Speicherplatzreservierung der Druckmethode beträgt nur etwa s e c h s Prozent derjenigen für das Gesamtverfahren!

Ähnlich günstig lassen sich die Verhältnisse bei den Rechenoperationen vermuten. Mit Hilfe der Methode von Cholesky - siehe II. Kapitel, Abschnitt 3.3 - beläuft sich die Anzahl der Rechenschritte beim Gesamtverfahren auf

$$m_G \approx \frac{k_t}{6} n^3 + i_t(n^2 + n_1 n_2) \tag{83}$$

und bei der Druckmethode auf

$$m_D \approx \frac{k_t}{6} n_2^3 + 2\, i_t\, n_2^2 \tag{84}$$

Offensichtlich bleiben die Werte für die Parameter k_t und i_t für beide Formulierungen erhalten. Der Aufbau der Systeme ist der dritten Potenz der Unbekannten proportional. Wird die Beziehung (81) unterstellt, so gilt

$$m_G^k : m_D^k = 64 : 1 \tag{85}$$

Der Gewinn, den die Druckmethode dem Gesamtverfahren gegenüber pro Iteration erzielt, ergibt sich aus der Relation der zweiten Potenzen, für die mit Gl. (81)

$$m_G : m_D = 10 : 1 \tag{86}$$

gilt. Hierbei darf nicht übersehen werden, daß zur Berechnung des Anfangsdruckzustandes Rechenoperationen notwendig sind, die auf

$$m_p \approx \frac{n_1^3}{2} + \frac{n_2^3}{6} + 3n_1^2 n_2 + n_1^2 \tag{87}$$

beziffert werden. Die Gl. (87) liefert mit Gl. (81)

$$m_p \approx 56\, n_2^3 \tag{88}$$

Die Schlußfolgerung, die aus den obigen Überlegungen gezogen werden muß, ergibt folgendes Bild. Der erzielte Gewinn bei der Umformung der Koeffizientenmatrizen auf die obere Dreiecksform geht der Größenordnung nach dadurch verloren, daß dieses Verfahren der Kenntnis eines Ausgangszustandes bedarf. Geschmälert wird nicht der Gewinn, der pro Iterationsschritt verbucht wird. Somit dürfte sich auch die Rechenzeit der Druckmethode gegenüber dem Gesamtverfahren während der Zeititeration auf ein Zehntel verringern.

Bei HWANG |8|, S. 112 findet man eine Zahlenangabe. Auf einem Computer IBM 360, Modell 67 benötigt er für das Gesamtsystem mit 420 Unbekannten für jeden Zeitschritt 20 Sekunden. Ein ähnliches Beispiel vorausgesetzt, beträgt eigenen Erfahrungen zufolge die Rechenzeit pro Iteration für die Druckmethode an einem Computer CD 6500 nur etwa eine Sekunde.

4. Numerische Ergebnisse

Die bisherigen theoretischen Erörterungen sollen an einem Beispiel erprobt werden. Dazu dient der mit einem Laststreifen der Breite 2a belastete elastische Halbraum - siehe Bild 1. Dieses Beispiel läßt sich als ebener Verzerrungsfall deuten. Analytische Lösungsvorschläge wurden zuerst von BIOT |11| für die Zeitsetzung der Oberfläche angegeben. Eine genaue Überprüfung der Biotschen Formel |11|, S. 430, Gl. (3.1) ergibt, daß ein nicht definiertes uneigentliches Integral offenbar den Wert Null erhalten hat. Die praktizierte Programmierung dieses Ausdrucks lieferte für die Zeitsetzung in der Streifenmitte wesentlich geringere Werte als am Rande des Streifens. Das widerspricht der Erfahrung. In einer Arbeit von SCHIFFMAN und CHEN |12| u.a. ist eine Näherungsformel für den Porenwasserüberdruckverlauf zu finden. Wie sofort zu erkennen ist - siehe |12|, S. 294, Gl. (15) - werden die Druckwerte im unmittelbaren Lastbereich für kleine Zeiten negativ. Das ist physikalisch falsch. Diese Tatsache stellte ein anderer Benutzer |13| ebenfalls fest. Dieser hatte auch keinen Erfolg, die Doktorarbeit von CHEN zu erhalten, in der dieser Ausdruck entwickelt wurde. Eine Korrektur von SCHIFFMAN ist nicht erfolgt. Das Fazit besteht darin, daß formelmäßige Ausdrücke für diesen Fall nicht zur Verfügung stehen. Somit fällt es schwer, die wirkliche Güte der numerischen Resultate zu beurteilen.

4.1 Ebener Verzerrungsfall

Aus Bild 1 sind sämtliche Details, wie Last, Unterteilung und die angenommenen Randbedingungen für Festkörper und Flüssigkeit zu entnehmen. Dieses Beispiel wurde mit den Formulierungen (39) und (40) gerechnet. Es haben sich keine wesentlichen Unterschiede bemerkbar gemacht. Die in den Bildern 2, usw. gezeigten Ergebnisse sind mit dem System (40) in der Formulierung (63) erzeugt worden. Während der Zeititeration wurde die Schrittweite Δt zweimal erhöht; insgesamt waren ungefähr 150 Iterationen erforderlich.

Als Materialbeiwerte wurde die Steifeziffer $\overline{E}_s$ zu

$$\overline{E}_s = 100. \; [q/a^2],$$

die Querkontraktion ν zu

$$\nu = 0.3$$

und die Permeabilität zu

$$k = 10^{-5} \left[a/sec \right]$$

festgelegt.

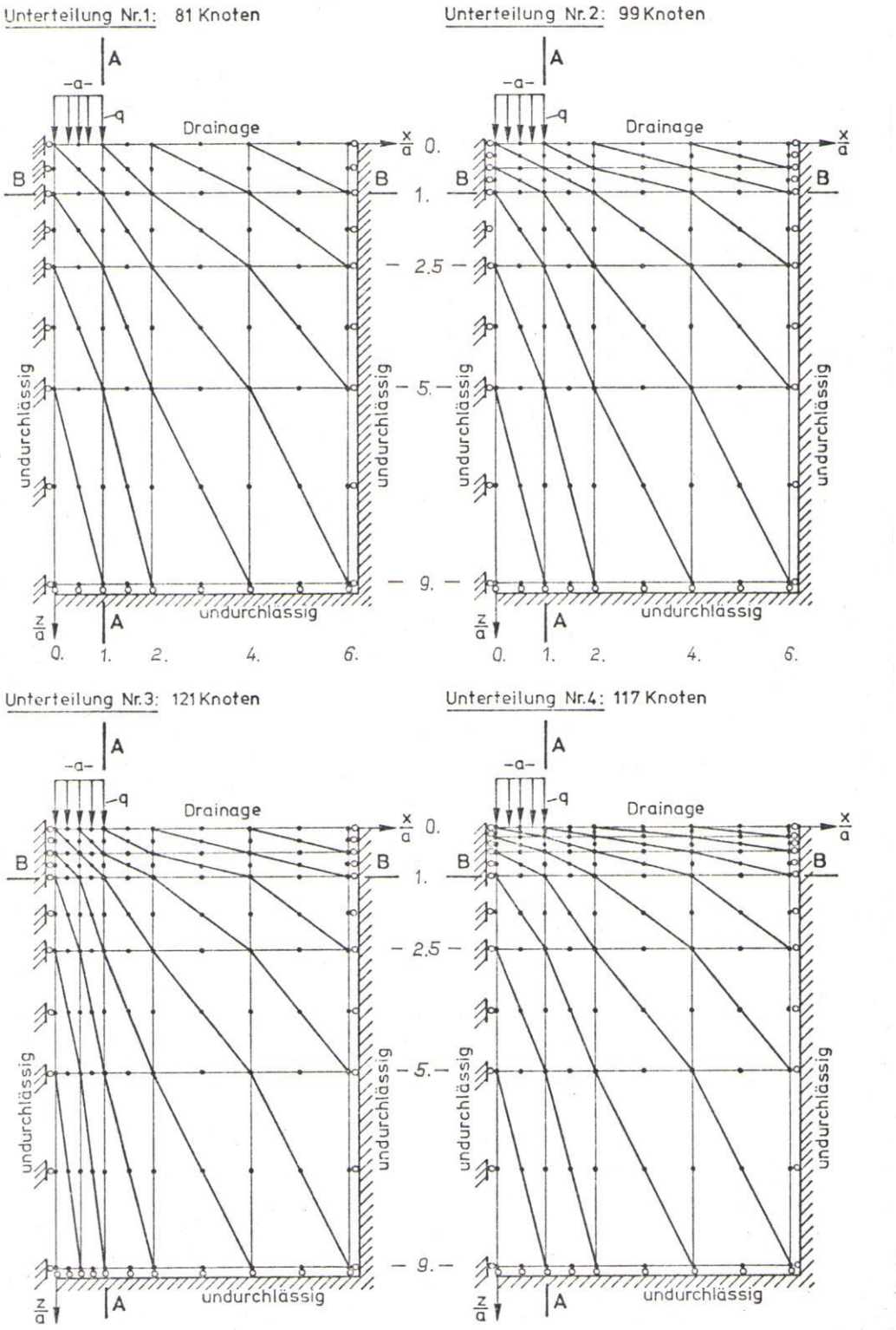

Bild 1: Ebene Verzerrung mit Konsolidation, Unterteilungen

In Anlehnung an SANDHU und HWANG wurden die Dreieckselemente TRIM6 für Verschiebungen und TRIM3 für den Druck verwendet.

In Bild 2 ist der zeitliche Druckverlauf im Knotenpunkt (O,1) zu sehen. Deutlich erkennbar ist der Mandel-Cryer Effekt. Es sind drei verschiedene Unterteilungen eingetragen worden, um die Konvergenz zu überprüfen, die sicherlich zufriedenstellend ist.

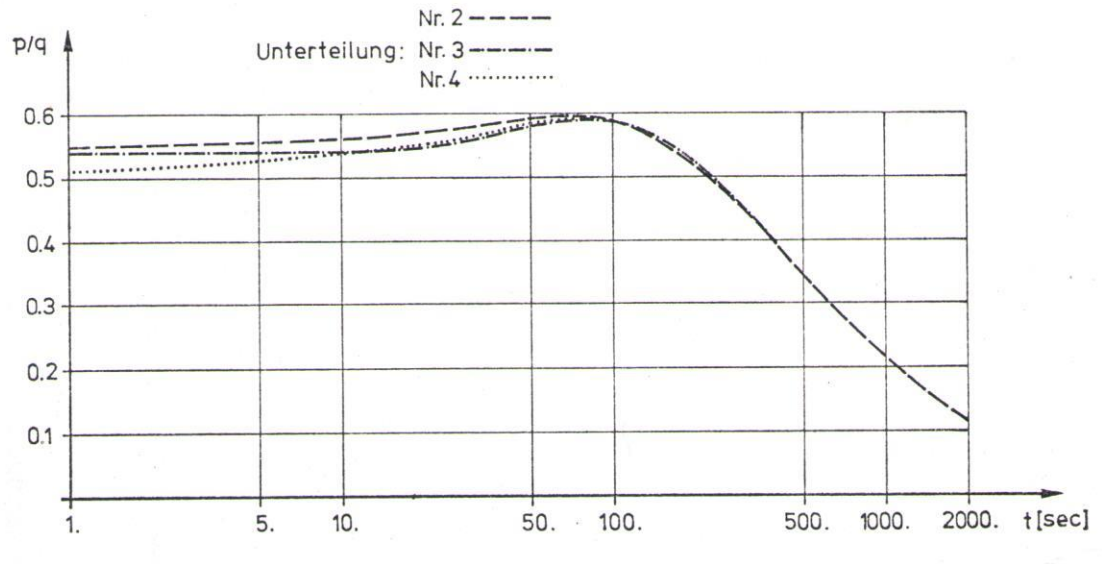

Bild 2: Zeitabhängiger Druckverlauf im Knoten (o,1), Konvergenztest

Die nächste Abbildung - Bild 3 - ist teilweise der Veröffentlichung von HWANG |8|, S. 113, Fig. 1 entnommen. Eigene Ergebnisse wurden mit eingetragen. Dargestellt ist der örtliche Druckverlauf unter der Mitte des Laststreifens, x/a=o., zu ausgewählten Zeiten. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß der MANDEL-CRYER-Effekt sich selbst in relativ großer Tiefe wie in Knoten (O,5) auswirkt. Dieses Phänomen ist über eine lange Zeitspanne (t=2ooo s) zu beobachten. Zu gleichen Zeiten wie in Bild 3 ist der Druckverlauf längs des horizontalen Schnittes B-B (z/a=1.) in Bild 4 aufgezeichnet worden.

Die Setzung der Oberfläche ist dem Bild 5 zu entnehmen. Zum Zeitpunkt t=o ist die rein elastische Verformung des Festkörpers eingetragen worden. Porenwasserverluste sind noch nicht eingetreten, so daß dieser Zustand nicht der eigentlichen Konsolidation zuzurechnen ist. Ganz klar ist die Schwellung zum äußeren Rand hin zu erkennen. In Übereinstimmung mit dem Druckprofil (t=1oo s) des Bildes 3 entweicht das Porenwasser am Anfang hauptsächlich aus dem Gebiet unterhalb der äußeren Last. Deswegen sind hier die ersten Setzungen infolge Verringerung des Porenvolumens spürbar. Strömt zu späteren Zeiten das Porenwasser auch aus entlegenen Bereichen zur

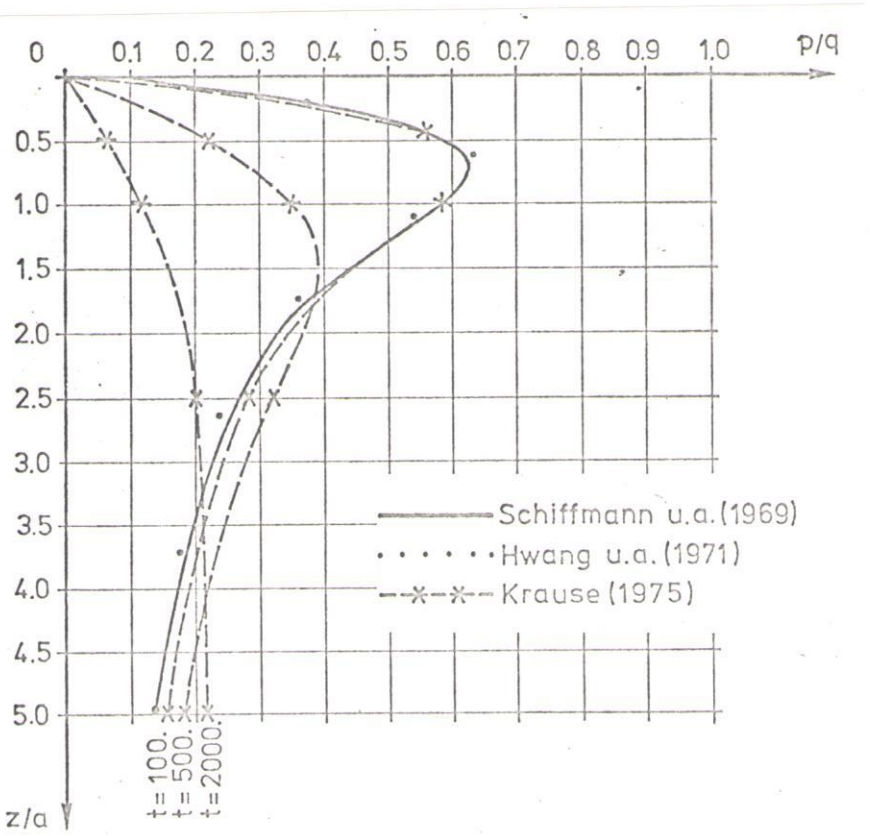

Bild 3: Druckverlauf längs Symmetrieachse (x/a=o.)

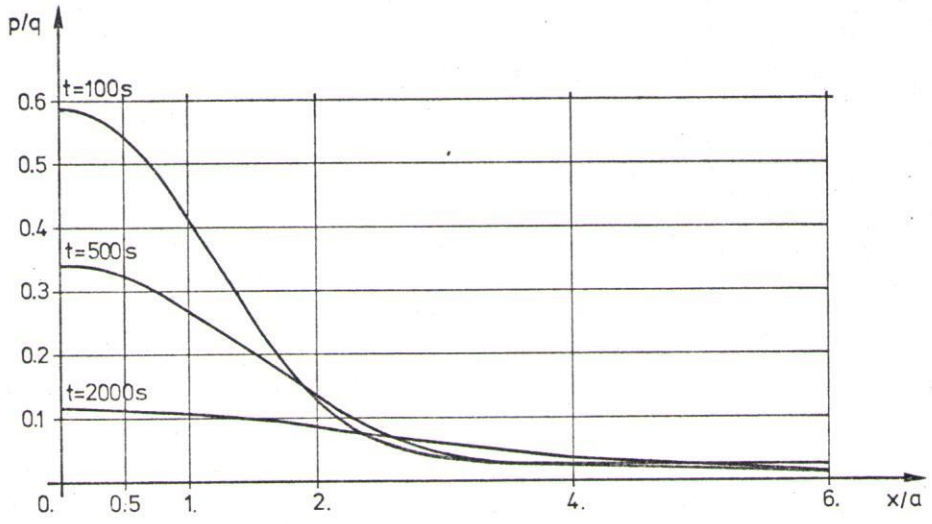

Bild 4: Druckverlauf längs Schnitt B-B (z/a=1.)

freien Oberfläche ab, so sind die Setzungen derselben in allen Punkten fast gleichmäßig. Die Zeit $t = 10^5$s entspricht dem Endzustand.

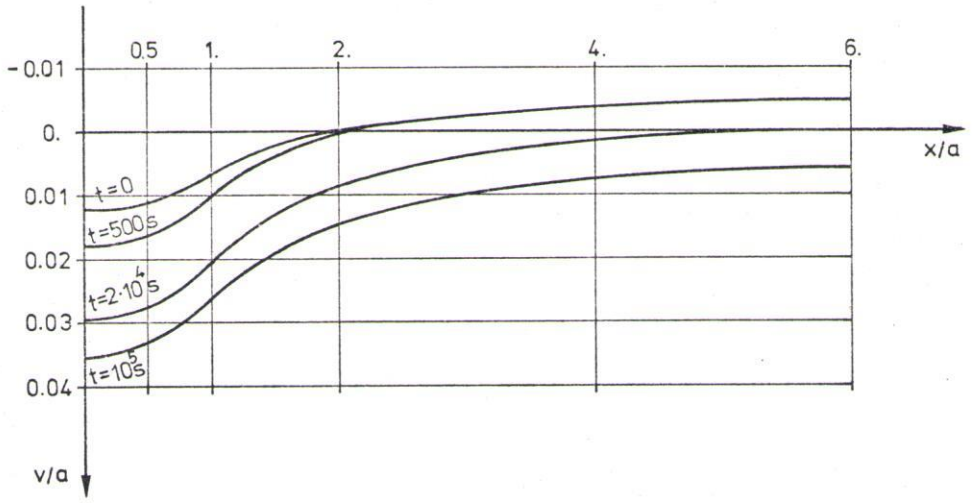

Bild 5: Setzungsverlauf der Oberfläche (z/a=o.)

In Ergänzung zur Oberflächensetzung ist in Bild 6 die Setzung des Schnittes B-B ersichtlich. Es ergibt sich im Prinzip der gleiche Verlauf wie in Bild 5. Der MANDEL-CRYER-Effekt scheint auf die Setzung keinen großen Einfluß auszuüben.

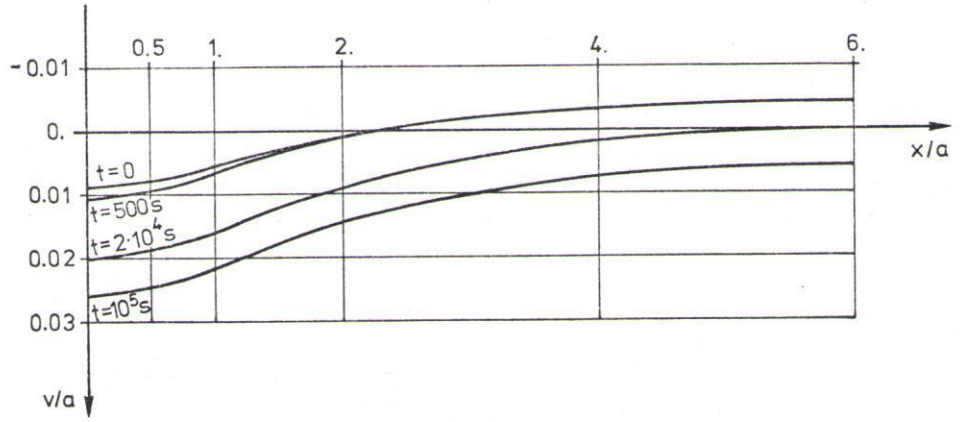

Bild 6: Setzung längs Schnitt B-B (z/a=1.)

In den nächsten beiden Zeichnungen, Bild 7 und Bild 8, ist der Anfangsdruckzustand längs der Schnitte A-A und B-B festgehalten worden, die die vier gewählten Unterteilungen liefern. Wie insbesondere aus Bild 7 hervorgeht, ist das Maximum des Druckverlaufs noch nicht erfaßt worden. Das beweist, daß auch die Unterteilungen Nr. 3 und Nr. 4 noch nicht fein genug sind.

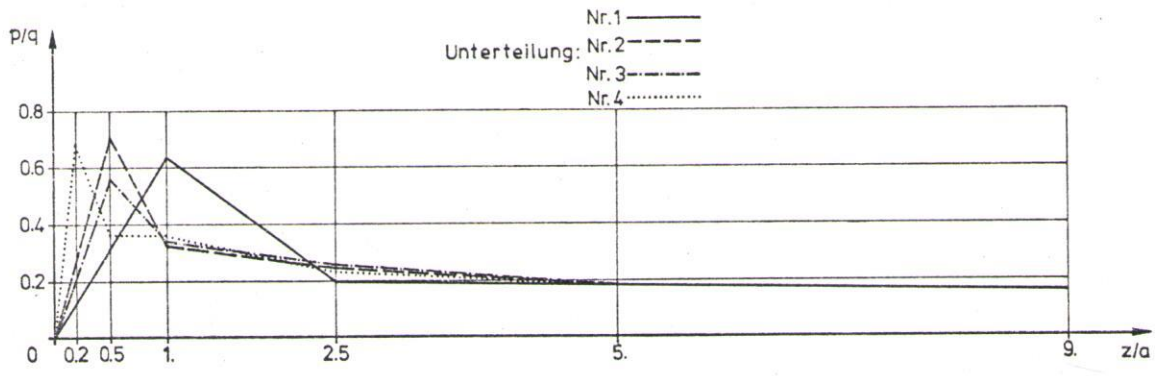

Bild 7: Anfangsdruckzustand, Schnitt A-A

Längs des Schnittes B-B ist die Konvergenz der Unterteilungen Nr. 2 bis Nr. 4 besser zu erkennen. Hier müssen zur Symmetrielinie hin noch Elemente eingelagert werden, da die waagerechte Tangente auf der Symmetrieachse -x/a=o.- noch nicht beobachtet werden kann.

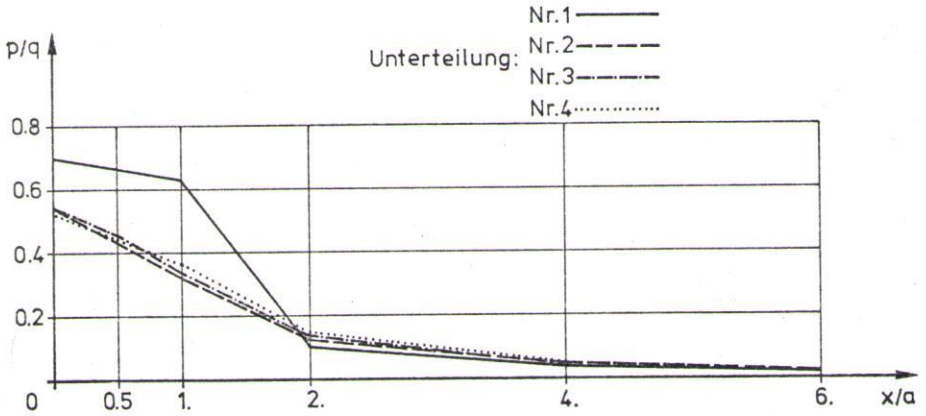

Bild 8: Anfangsdruckzustand, Schnitt B-B

5. Zusammenfassung

Aus den Prinzipien der virtuellen Arbeiten wurden unter weiteren Einschränkungen zwei zeitabhängige finite Gleichungssysteme gewonnen. SANDHU |7| hat **als** erster die Formulierung (39) gefunden. Das zweite System (40) hat ZIENKIEWICZ |10| andeutungsweise hingeschrieben. Danach wurden für die Lösung der finiten Gleichungen drei Wege vorgeschlagen. Das Gesamtsystem haben schon SANDHU u.a. erfolgreich behandelt, während die Druckmethode bis jetzt unbekannt war. Detailierte Untersuchungen haben ergeben, daß das Gesamtverfahren im Vergleich mit der Druckmethode nicht so günstig

abschneidet. Bezüglich der Zeititeration werden sowohl für den Speicherbedarf als auch für die Rechenzeit erhebliche Einsparungen verzeichnet. Diese Aufbereitung einer finiten Methode läßt eine instationäre dreidimensionale Rechnung erhoffen.

Das zum Abschluß vorgeführte numerische Beispiel mußte auf analytische Vergleichslösungen verzichten, so daß die Qualität der Resultate nicht sicher beurteilt werden kann. Die physikalische Interpretation und die numerische Konvergenz der Ergebnisse sind trotzdem zufriedenstellend.

6. Bezeichnungen

a	= Laststreifenbreite, Bild 1
$\bar{E}_s$	= Steifeziffer (Elastizitätsmodul)
i_t	= Anzahl der Iterationsschritte
k	= Permeabilität
k_t	= Anzahl der Zeitintervallerhöhungen
n, n_1, n_2	= Anzahl der Unbekannten
m_D, m_G, m_P	= Anzahl der Rechenoperationen
q	= Last pro Flächeneinheit, Bild 1
Δt	= Zeitintervall
α_o	= dimensionsloser Faktor, Gl. (55)
α_1, α_2	= Materialkenngrößen, Gl. (49), (50)
ν	= Querkontraktionszahl

Literatur:

|1|	Wilson, E.L. u. Nickell, R.E.	Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, Nuc. Engg. Design 4, p. 276, 1966.
|2|	Christian, J.T.	Undrained Stress Distribution by Numerical Methods, ASCE, SM6, p. 1333, 1968.
|3|	Christian, J.T. u. Boehmer, J.W.	Plane Strain Consolidation by Finite Elements, ASCE, SM4, p. 1435, 197O.
|4|	Finn, W.D.l. u.a.	Diskussionsbeitrag zu |2| ASCE, SM 5, p. 8o8, 1971
|5|	Christian, J.T. u.a.	Abschlußdiskussion zu |2| ASCE, SM 11, p. 1596, 1971
|6|	Sandhu, R.S. u. Wilson, E.L.	Consolidation of a Layer under a Strip Load, ASCE, SM 7, p. 693, 1973.
|7|	Sandhu, R.S. u. Wilson, E.L.	Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media, ASCE, EM 3, p. 641, 1969.
|8|	Hwang, C.T. u.a.	On Solution of Plane Strain Consolidation Problems by Finite Element Methods, Can. Geo. J., Vol. 8, p. lo9, 1971.
|9|	Valliappan, S.u.a.	Finite Element Analysis of Consolidation Problems, UAH Press, p. 741, Swansea, 1974.
|lO|	Zienkiewicz, O.C.	The Finite Element Method in Engeneering Science, McGraw-Hill, London, 1971.
|11|	Biot, M.A.	Consolidation Settlement under a Rectangular Load Distribution, J. Appl. Phys., Vol. 12, p. 426, 1941.
|12|	Schiffman, R.L., Chen, A. u.a.	An Analysis of Consolidation Theories, ASCE, SM 1, p. 289, 1969.
|13|	Viggiani, C.	Private Mitteilung. Universita di Napoli,1975.
|14|	Sandhu, R.S.	Private Mitteilung, The Ohio State University, 1975.
|15|	Hwang, C.T.	Private Mitteilung, EBA Engeneering Consultants Ltd, Edmonton 1975.
|16|	Booker, J.R. u. Small, J.C.	An Investigation of the Stability of Numerical Solutionsof BIOT's Equations of Consolidation, Int. J. Solids Structures, Vol. 11, p. 907-917, 1975

VI. Kapitel:

Zukünftige Entwicklungsmöglichkeiten

Es scheint selbstverständlich zu sein, daß die Entwicklung, wie sie in dieser Arbeit vollzogen wurde, bei weitem noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden kann. Im Gegenteil, die ersten Forschungsschritte auf diesem Gebiet sind erst getan worden. Zunächst ist nur der Beweis geglückt, daß akzeptable numerische Verfahren existieren, die praktisch mit Hilfe eines Rechners in einem vernünftigen Rahmen realisierbar sind.

Für die zukünftige Forschung können zwei Akzente gesetzt werden. Erstens handelt es sich darum, die finiten Gleichungen dahingehend zu modifizieren, daß weitere physikalische Phänomene berücksichtigt werden. In erster Linie ist dabei an die Einarbeitung der Porösität zu denken. Eine Unzulänglichkeit der jetzigen Formulierungen besteht darin, daß die Abnahme des Porenvolumens, die örtlich verschieden ist, unbeachtet blieb. Hier müßte während der Zeititeration eine elementweise Korrektur erfolgen. Im Zusammenhang damit wäre zu prüfen, inwiefern eine sowohl örtlich als auch zeitlich abhängige Permeabilität einzuführen ist. Weiterführende Überlegungen könnten mit dem Ziel angestellt werden, die Voraussetzung fallenzulassen, daß der gesamte Prozeß isotherm abläuft. Hierzu muß die Temperatur als weitere unabhängige Größe eingeführt werden. Die Viskosität der Flüssigkeit mitnehmen zu wollen, erscheint unter dem Gesichtspunkt einer damit verbundenen Erhöhung der Unbekanntenzahlen nicht ratsam. Dieser Fall hängt von der Beschaffenheit des Fluids ab.

Die zweite Forschungsrichtung erschließt eine breitere Anwendungsbasis. Zunächst könnten ohne Schwierigkeiten Grundwasserströmungen berücksichtigt werden. Dazu sind schon einige Arbeiten erschienen. Das wäre insbesondere dann interessant, wenn das poröse Medium als nur teilweise gesättigt behandelt wird. Die Vereinigung von Konsolidationsvorgängen mit Grundwasserströmungen wäre möglich unter Einschluß instationärer Grundwasserspiegelbewegungen. Ein anderer Blickpunkt wäre die Behandlung geschichteter Medien. Wie schon

im II. Kapitel erörtert wurde, ist hier Vorsicht geboten. Die größten Hindernisse, die aus dem Weg geräumt werden müssen, liegen in der Konstruktion zusätzlicher Terme im Variationsprinzip. Es gilt, die zahlreichen Übergangsbedingungen einzuarbeiten.

L e b e n s l a u f

Gerhard Paul Krause

geboren am 10.11.1946 in Berlin

Eltern:	Paul Krause, Technischer Kaufmann Gerda Krause, geb. Becker, Sekretärin	
Schule:	1953 - 1959	Grundschule
	1959 - 1966	Malwida-von-Meysenbug-Schule, Neusprachliches Gymnasium
Studium:	1966 - 1971	an der Technischen Universität Berlin, Fakultät für Maschinenwesen bzw. Fachbereich 9 Mechanik und Thermodynamik, Fachrichtung Theoretischer Maschinenbau
Promotion:	1972 - 1975	Doktorandentätigkeit am Institut für Luft- und Raumfahrt der Technischen Universität Berlin